# КУРСЪ
# МАТЕМАТИКИ.

# КУРСЪ
# МАТЕМАТИКИ

*Господина Безу, Члена Французской Академіи Наукъ, Экзаминатора Воспитанниковъ Артиллерійскаго и Морскаго Корпусовъ, и Королевскаго Цензора.*

ПЕРЕВЕДЕНЪ

*Васильемъ Загорскимъ*

ВЪ

пользу и употребленіе

**БЛАГОРОДНАГО ЮНОШЕСТВА,**

Воспитывающагося

ВЪ

УНИВЕРСИТЕТСКОМЪ ПАНСІОНѢ.

---

*Часть Вторая,*

содержащая

## ГЕОМЕТРІЮ И ПЛОСКУЮ ТРИГОНОМЕТРІЮ.

---

МОСКВА,
Въ Университетской Типографіи,
*у Ридигера и Клаудія.*
1798.

Съ Одобренія Московской Цензуры.



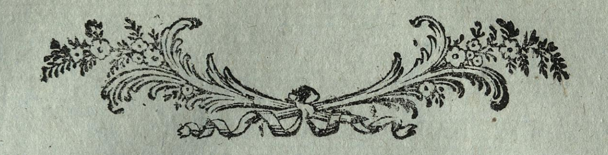
# ОГЛАВЛЕНІЕ.

Стран.

Стран.



---



# ГЕОМЕТРІЯ.

1. Пространство, занимаемое тѣлами, имѣетъ три измѣренія въ *длину*, *ширину* и *глубину* или *высоту*.

Хотя сіи три измѣренія находятся всегда совокупны во всякомъ тѣлѣ, однакожъ не рѣдко мысленно раздѣляются; на примѣръ когда я помышляю о глубинѣ рѣки, рва и проч. въ такомъ случаѣ не занимаюсь ни длиною, ни шириною ея; равнымъ образомъ разсуждая о пространствѣ десятины, кромѣ длины и ширины ея никакой толщины въ мысляхъ не представляю.

Сіе научаетъ насъ различать три рода протяженія, и именно:

Протяженіе въ одну только длину, называемое иначе *линѣею*.

Протяженіе въ длину и ширину, именуемое *поверьхностью*.

Наконецъ протяженіе въ длину, ширину и глубину или высоту, называемое *тѣломъ*.

Наука, разсуждающая попеременно о свойствахъ трояка го сего протяженія, называется *Геометрія*, и раздѣляется на три части:

На *Эвтиметрію*, которая предметомъ имѣетъ рлзличныя свойства линѣй.

*Эпипедометрію*, которая учитъ измѣренію поверхностей.

*Стереомтрію*, которая занимается измѣреніемъ тѣлъ.

---

## ОТДѢЛЕНІЕ ПЕРВОЕ.

### *О Линѣяхъ.*

2. *Точка* есть предѣлъ или конецъ линѣи. Симъ именемъ называется также всякое мѣсто, гдѣ линѣи между собою сходятся или пересѣкаются.

Точку воображать должно безконечно малымъ пространствомъ.

Когда точка, простираясь отъ одного предмета къ другому, не уклоняется ни въ какую сторону; тогда производитъ слѣдомъ

своимъ *прямую линѣю*. Линѣя AB (*фиг. 1.*) есть прямая и самый кратчайшій путь между точками A и B.

Напротивъ *кривою линѣею* называется такой слѣдъ точки, которая при каждомъ своемъ движеніи безконечно мало отходитъ въ ту или другую сторону.

Почему прямыя линѣи бываютъ всегда одинаковаго вида, кривыя же могутъ изображаться различно.

Прямыя или кривыя линѣи, проведенныя на бумагѣ или на другой какой поверхности, не могутъ быть безъ ширины; потому что карандашъ, перо и всякій другой для сего употребляемой инструментъ не имѣетъ такого тончайшаго конца, которой бы не заключалъ въ себѣ ни длины, ни ширины.

(3.) *Для проведенія прямой линѣи*

1е. *На бумагѣ*, на пр. отъ точки A къ точкѣ B. (*Фиг.* 1).

Къ точкамъ A и B приложи какъ можно ближе въ равномъ разстояніи линѣйку, и карандашомъ или перомъ проведи вдоль оной по бумагѣ линѣю, которая будетъ совершенно прямая AB.

2е. *На деревѣ или другой какой матеріи*: возми снурокъ или нитку, натри его мѣломъ, и натянувъ приложи концами къ точкамъ, между которыми должно назначить линѣю; по томъ изъ середины приподнявъ опусти снурокъ, онъ паденіемъ своимъ опредѣлитъ желаемую линѣю.

3е. *На полѣ*, когда предметы, между которыми должно провести линѣю, одинъ отъ другаго въ виду находятся.

Въ семъ случаѣ между предметами тѣми назначается нѣсколько точекъ посредствомъ кольевъ. На примѣръ когда требуется продолжить линѣю (фиг. 2) между А и В — воткни колъ BD сколько можно съ помощію отвѣса вертикальнѣе въ точку В, по томъ такимъ же образомъ въ точку А, и ставъ у сей самой точки А, прикажи другому ставить попремѣнно въ серединѣ того мѣста другіе многіе колья — такъ, чтобъ приложивъ глазъ къ колу AD, когда будешь смотрѣть на колъ BD, прочіе колья изъ нихъ не видны были. Точки C,C,C, и проч. опредѣленныя такимъ образомъ, назначатъ прямую линѣю.

Когдажъ предметы, между которыми проводить нужно прямую линѣю, не будутъ въ виду; то для сего употребляются другія средства, о которыхъ послѣ объявлено будетъ.

4. Большія линѣи измѣряются другими малыми, и вообще мѣра линѣй есть прямая линѣя. Мѣрять прямую или кривую линѣю или какое нибудь разстояніе значитъ искать, сколько разъ въ той линѣѣ или въ томъ разстояніи содержится другая прямая линѣя опредѣленной величины, принятая за единицу. Сія единица бываетъ совершенно произвольна, и потому различные роды мѣръ находятся. При концѣ сей книги прилагается таблица съ показаніемъ мѣръ, нужныхъ къ свѣдѣнію.

5. Для облегченія понятія мы предполагаемъ здѣсь, что фигуры, въ которыхъ линѣи будемъ разсматривать, чертятся на *плоской* поверхности, то есть на такой,

къ которой всячески приложить можно прямую линѣю.

6. Что касается до кривыхъ линѣй, то въ сихъ основаніяхъ Геометріи кромѣ *окружности Круга* никакихъ другихъ болѣе показано не будетъ. Симъ именемъ называется такая кривая линѣя BCFDG (*фиг.* 3), которой всѣ точки находятся въ равномъ разстояніи отъ средоточія A, заключеннаго въ плоскости, на которой она начерчена. Происходитъ же окружность круга отъ обращенія прямой линѣи AD около точки A, въ которой она однимъ своимъ концомъ утверждена.

Точка A называется *центръ*; прямыя линѣи AB, AC, AF и проч. которыя отъ центра проведены къ окружности, названіе имѣютъ *радіусовъ* или *полупоперешниковъ*. Всѣ сіи полупоперешники равны между собою, потому что опредѣляютъ разстояніе отъ центра къ окружности.

Линѣи, какъ BD и проч. проходящія чрезъ центръ, и касающіяся концами своими окружности, называются *діаметры* или *поперешники*; а какъ всякой поперешникъ состоитъ изъ двухъ полупоперешниковъ, то всѣ поперешники одного круга равны.

Изъ сего слѣдуетъ также то, что каждой поперешникъ раздѣляетъ окружность

круга на двѣ равныя части; ибо ежели вообразимъ себѣ, что фигура GDFCB будетъ сложена по поперешнику BD, то всѣ точки BGD должны упасть на другія съ противной стороны находящейся половины DFB; а иначе не было бы справедливо, что точки окружности находятся въ равномъ разстояніи отъ центра.

Части окружности BC, CE, ED и проч. называются *дугами*; а *кругъ* есть то пространство, которое содержится въ окружности BCFDGB.

Прямая линѣя напр. DF, которая проводится отъ однаго конца D дуги къ другому F, именуется *хорда*.

7. *Равныя хорды одного круга или равныхъ круговъ противополагаются равнымъ дугамъ, и обратно.* Ибо естьли представимъ себѣ, что хорда DG равная DF перенесена будетъ съ дугою своею на хорду DF, то точка D будетъ обѣимъ общая, и точка G упадетъ въ F; а какъ всѣ точки сихъ дугъ отстоятъ равно отъ центра A, то изъ сего несомнѣнно заключить должно, что всѣ точки дуги DG закроютъ дугу DF.

8. Окружность круга большая или малая по общему всѣхъ согласію раздѣляется на 360 равныхъ

частей, названныхЪ градусами; градусЪ на 60 минутЪ, минута на 60 секундЪ и такЪ далѣе, непрестанно вЪ 60 содержанїи.

| | | |
|---|---|---|
| Знаки | Градуса . . . . . . . . | ° или г |
| | минуты . . . . . . | ′ |
| | секунды . . . . . . | ″ |
| | терцїи . . . . . . . | ‴. |

3 градуса, 24 минуты, 55 секундЪ, пишутся $3^{\circ}, 24', 55''$.

Слѣдовательно градусы суть неопредѣленной величины и бываютЪ соразмѣрны окружностямЪ своимЪ.

## *О УглахЪ и ихЪ Измѣренїи.*

9. Когда двѣ линѣи АВ и АС (*фиг. 4. 6 и 7*) соединясь вЪ одной точкѣ, сдѣлаютЪ большое или малое между собою отверстїе; то оное отверстїе называется *угломЪ*.

Отверстїе ВАС есть уголЪ, и бываетЪ вЪ разсужденїи линѣй его составляющихЪ или *прямолинѣйной*, которой состоитЪ изЪ обѣихЪ прямыхЪ; или *криволинѣйной* изЪ обѣихЪ кривыхЪ; или *смѣшеннолинѣйной* изЪ одной прямой, а другой кривой.

Мы будемЪ разсуждать теперь обЪ однихЪ прямолинѣйныхЪ углахЪ.

10. Дабы имѣть совершенное понятїе обЪ углѣ, то надлежитЪ себѣ представить, что линѣя АВ была положена сначала на линѣю АС и однимЪ ея концомЪ утверждена вЪ точкѣ А, а другой ея конецЪ стали отводить отЪ точки С (какЪ бы ножку цир-

кула на шалнерѣ ) и привели въ настоящее положенiе. Количество, какое прошла линѣя АВ есть точно то, что мы называемъ угломъ.

Изъ сего не трудно заключить, что величина угла не зависитъ отъ продолженiя его боковъ; такимъ образомъ уголъ изображенной линѣями АВ и АС есть тотъ же самой, какой заключается между боками АЕ и AF; ибо линѣя АВ и линѣя АЕ должны каждая пройти одинакое количество, дабы притти въ настоящее положенiе.

Точка А, гдѣ сходятся двѣ линѣи АВ и АС, называется *верхъ угла*, а самыя тѣ линѣи *боками* его.

Для означенiя угла употребляется три буквы, изъ которыхъ одна ставится при верхѣ, а другiя двѣ по концамъ боковъ; и пиша или выговаривая, полагаемъ въ середину всегда ту, которая у верху находится: такимъ образомъ для изображенiя угла, заключеннаго между боками АВ и АС, мы пищемъ и выговариваемъ уголъ ВАС или САВ.

Иногда означается уголъ одною буквою, при верху его находящеюся; но въ семъ случаѣ надлежитъ примѣчать особенно то, что означается уголъ такимъ образомъ тогда, когда онъ бываетъ одинъ и не имѣетъ общаго верху съ другими. На пр. въ *фиг.* 5 можно изобразить просто уголъ *а*; но ежели сдѣлаешь тоже въ *фиг.* 4 на пр. уголъ А, то не можно узнать, о какомъ именно говоришь, о углѣ ли ВАС или BAD.

11. Какъ уголъ ВАС (*фиг.* 4) есть ничто иное какъ количество, которое бокъ АВ

долженЪ былЪ пройти изЪ положенія АС до положенія АВ, и какЪ вЪ семЪ обращеніи каждая точка линѣи АВ, на пр. точка В находясь всегда вЪ одинакомЪ разстояніи отЪ А, необходимо должна описывать дугу, которая увеличивается или уменьшается соразмѣрно, какЪ увеличивается или уменьшается уголЪ; то изЪ сего удобно понять можно, что мѣрою угла должна принята быть сія дуга; а какЪ каждая точка бока АВ описываетЪ особенную дугу различной длины, то не самую длину дуги должно принимать мѣрою, но число градусовЪ и частей его, которое будетЪ всегда одинаково для каждой дуги, описанной каждою точкою линѣи АВ; потому что всѣ сіи дуги вЪ разсужденіи цѣлыхЪ своихЪ окружностей суть одинаковыя части. ИзЪ сего заключимЪ, что . . .

12. *Всякой уголЪ напр.* ВАС (фиг, 4) *имѣетЪ мѣрою число градусовЪ и частей градуса той дуги, которая заключается между его боками, и описывается изЪ верху его, какЪ изЪ центра.*

И такЪ когда вЪ послѣдствіи будетЪ сказано, что такой-то уголЪ имѣетЪ мѣрою такую-то дугу; чрезЪ сіе разумѣть надобно, что онЪ имѣетЪ мѣрою число градусовЪ и частей градуса той дуги.

13. Почему, *ежели потребуется раздѣлить уголъ на нѣсколько равныхъ частей*; стоитъ только раздѣлить дугу, измѣряющую его, на желаемое число частей, и провести къ точкамъ раздѣленія изъ верху угла прямыя линѣи. Но одѣленіи дугъ ниже будетъ объявлено.

14. *А чтобъ сдѣлать уголъ равный другому*; на пр. сдѣлать на концѣ *a* линѣи *ac* (*фиг.* 5) уголъ равный углу BAC (*фиг* 4). Въ такомъ случаѣ раствореніемъ циркула по изволенію взятымъ, изъ точки *a* какъ изъ центра опиши неопредѣленной величины дугу *cb*; по томъ ставъ ножкою цыркула въ верхъ A даннаго угла BAC, опиши тѣмъ же раствореніемъ дугу BC, заключающуюся между боками сего угла, и смѣрявъ циркуломъ разстояніе отъ C до B, перенеси оное изъ *c* въ *b*; напослѣдокъ чрезъ точку *b* изъ верху *a* проведи прямую линѣю; отъ чего произойдетъ уголъ *bac* равный BAC.

Истинна сего явствуетъ изъ того, что уголъ *bac* имѣетъ мѣрою дугу *bc* (12), и уголъ BAC дугу BC. Но дуги сіи равны между собою, потому что принадлежатъ равнымъ кругамъ и противополагаются равнымъ хордамъ (7); понеже разстояніе отъ *b* до *c* сдѣлано тоже самое, какое находится между B и C.

15. Уголъ BAC (*фиг.* 6) называется *прямой*, когда одинъ его бокъ AB стоитъ на другомъ AC не наклоняясь къ нему, ни къ продолженію его AD.

*Острой* уголъ (*фиг.* 4) есть тотъ, котораго одинъ бокъ AB склоняется больше къ другому своему боку AC, нежели къ продолженію его AD.

Наконецъ *тупой* уголъ (*фиг.* 7) происходитъ, когда бокъ его AB склоняется бо-

лѣе къ продолженію другаго своего бока, нежели къ самому ему.

16. Изъ сказаннаго о мѣрѣ угловъ заключимъ, что

1е. *Уголъ прямой имѣетъ мѣрою 90°; острый меньше 90°; а тупой больше 90°.*

Ибо ежели линѣя AE (*фиг.* 3) не наклоняется ни на бокъ AB, ни на продолженіе его AD, то оба тѣ угла BAE и DAE будутъ равны; а когда они равны, то и дуги, ихъ измѣряющія, должны быть также равны; но какъ обѣ сіи дуги DE и EB составляютъ вмѣстѣ 180°, почему каждая порознь будетъ 90°, и слѣдовательно углы BAE и DAE также по 90°.

А когда сіе справедливо, то и въ томъ нѣтъ сомнѣнія, что острой уголъ BAC есть меньше, а тупой BAF больше 90°.

17. 2е. *Два угла* BAC *и* BAD (фиг. 4, 6 и 7) *произшедшіе отъ прямой линѣи* AB, *проведенной подъ какимъ нибудь наклоненіемъ къ другой прямой* CD, *составляютъ вмѣстѣ всегда 180 градусовъ, или равны двумъ прямымъ угламъ.*

Естьли примешь точку A общій верхъ угловъ за центръ круга, тогда CD превратится въ діаметръ его; а какъ оба угла

BAC и BAD измѣряются двумя дугами BC и DB, составляющими половину окужности, того ради они равны 180 градусамъ или двумъ прямымъ угламъ.

18. 3 е. *Ежели изъ точки* A (фиг. 3) *проведется нѣсколько прямыхъ линѣй на пр.* AC, AE, AF, AD, AG *и проч. то всѣ углы* BAC, CAE, EAF, FAD, DAG, GAB, *составленные ими, будутъ равны* 360°; ибо пространство, занимаемое сими углами, помѣщается въ окружности цѣлаго круга.

19. Два угла на пр. BAC и BAD (фиг. 4), которые будучи взяты вмѣстѣ, составляютъ 180 градусовъ, называются углы *дополненія*; такимъ образомъ BAC есть подолненіемъ BAD, а BAD есть дополненіемъ BAC, потому что одинъ изъ сихъ угловъ есть то, что нужно добавить къ другому, дабы составить 180 градусовъ.

И такъ равные углы будутъ имѣть равныя дополненія, и обратно.

20. Изъ сказаннаго заключимъ, что *углы* BAC *и* EAD (фиг. 8) *при верху противоположенные и содержащіеся между двумя взаимно пересѣкающимися прямыми линѣями* BD *и* EC, *суть равны между собою.*

Ибо BAC имѣетъ дополненіемъ CAD, и EAD тотъ же самой CAD.

21. *Дополненіемъ* угла или дуги къ 90 градусамъ называется то, чѣмъ уголъ тотъ или дуга меньше или больше 90°. И такъ (*фиг.* 3) уголъ BAC имѣетъ дополненіемъ CAE; уголъ BAF имѣетъ дополненіемъ FAE.

Углы встрѣчаются повсюду какъ въ Теоріи такъ и Практикѣ, ибо посредствомъ ихъ опредѣляются разныя положенія предметовъ и мѣстъ. На пр. углы бастіона, плечные, куртины и фланка означаютъ различныя линѣи укрѣпленій въ Фортификаціи. Пушечной выстрѣлъ управляется также угломъ, которой линѣя цѣли производитъ съ продолженіемъ оси орудія.

Находится довольное число инструментовъ, служащихъ для измѣренія угловъ или къ составленію ихъ такими, какъ кому понадобится; но мы здѣсь кромѣ *Транспортира* ни о какихъ другихъ не упомянемъ; а сдѣлаемъ описаніе прочимъ, нужнымъ къ нашему предмету, въ Тригонометріи.

22. Инструментъ, представленной въ *фигурѣ* 9 и названной транспортиромъ, служитъ къ измѣренію и составленію угловъ на бумагѣ. Онъ есть полкруга; дѣлается изъ мѣди или рогу и раздѣляется на 180 градусовъ; центръ его означенъ малою насѣчкою C. Когда нужно вымѣрять какой нибудь уголъ на пр. BAC (*фиг.* 4, 6 и 7), то приложи центръ C сего инструмента къ верьху A измѣряемаго угла, а радіусъ его CB къ боку AC; тогда другой бокъ AB того угла, иногда продолженной, естьли нужда потребуетъ, покажетъ въ той части раздѣленій, чрезъ которую онъ проходитъ, сколько дуга транспортира, заключающаяся между боками угла BAC, содержитъ въ себѣ градусовъ, и слѣдовательно покажетъ число градусовъ угла BAC.

Но чтобъ сдѣлать помощїю транспортира уголъ требуемаго числа градусовъ, — Радїусъ CB сего инструмента приложи къ линѣи, которая должна быть бокомъ желаемаго угла такъ, чтобъ центръ его упалъ въ точку, опредѣленную для верьху сего угла; по томъ отщитавъ число градусовъ, сколько надобно, назначь въ томъ мѣстѣ на бумагѣ точку; изъ верьху чрезъ точку сїю проведи прямую линѣю, которая съ первою сдѣлаетъ желаемой уголъ.

## *О Перпендикулярныхъ и Косыхъ Линѣяхъ.*

23. Сказано было (15) что линѣя AB (*фиг.* 6) ежели она не наклоняется ни къ AC ни къ AD, производитъ съ сими двумя частями углы, называемые *прямыми*.

Сїя самая линѣя AB именуется также *перпендикулярною* къ линѣи AC или DC или AD.

А изъ сего опредѣленія прїемлются за неоспоримыя истины слѣдующія три предложенія.

24. 1е. *Когда линѣя* AB (фиг. 10) *перпендикулярна къ другой* CD, *то сїя перпендикулярна также къ* AB.

Ибо когда AB перпендикулярна къ CD, то углы AEC и AED суть равны; но AED равенъ BEC (20); почему AEC равенъ BEC; почему линѣя CE или CD не наклоняется ни къ AE ни къ BE; слѣд. она перпендикулярна къ AB.

25. 2е. *Изъ одной и той же точки E, взятой на линѣѣ CD, не можно поставить кромѣ одного перпендикуляра къ сей линѣѣ.*

26. 3е *Изъ одной и той же точки A, взятой внѣ линѣи CD, не можно опустить къ ней кромѣ одного перпендикуляра.*

Ибо ясно видѣть можно, что нѣтъ другихъ точекъ, кромѣ A и E, гдѣ бы линѣя AE не могла наклоняться ни къ ED ни къ EC.

27. *Тѣ линѣи, которыя проведены будучи изъ точки A, отходятъ въ равномъ склоненіи отъ перпендикуляра, суть равны между собою; и чѣмъ онѣ болѣе отходятъ отъ перпендикуляра, тѣмъ становятся длиннѣе, и слѣд. перпендикуляръ есть кратчайшая изъ всѣхъ линѣя.*

Представимъ, что EG равна EF, то ежели положится фигура AEG на фигуру AEF; въ такомъ случаѣ линѣя AE будетъ имъ обѣимъ общая, и по причинѣ равенства угловъ AEG и AEF, линѣя EG закроетъ EF, понеже EG предположена равна EF; а изъ сего явствуетъ, что линѣя AG точно упадетъ на AF, и слѣд. обѣ онѣ должны быть между собою равны. Чтожъ касается до

второй части предложенія, то видно, что точка C линѣи CE, находясь далѣе отъ AB нежели точка F той же самой линѣи CE, необходимо также должна отстоять далѣе и отъ каждой точки взятой на AB; почему AC есть больше линѣи AF, а перпендикуляръ есть изъ всѣхъ кратчайшая.

28. Линѣи AF, AC, AG называются *косыми* или *наклоненными* въ разсужденіи перпендикуляра и линѣи CD, и вообще линѣя косая или наклоненная къ другой бываетъ тогда, когда она дѣлаетъ съ тою другою острой или тупой уголъ.

29. Понеже косыя линѣи AF, AG (27) равны между собою, когда онѣ на ровное количество склоняются отъ перпендикуляра; то изъ сего должно заключить, *что когда какая нибудь линѣя бываетъ перпендикулярна къ средней точкѣ E другой линѣи FG, то каждая перпендикуляра того точка находится въ равномъ разстояніи какъ отъ конца F, такъ и конца G*; ибо сіе явствуетъ изъ того, что, ежели бы какія точки перпендикуляра AE или AB находились не въ одинаковомъ разстояніи отъ F и G, то онъ бы въ тѣхъ мѣстахъ наклонялся и не дѣлалъ бы прямой линѣи.

30. Не меньше сего справедливо и то, что *нѣтъ кромѣ точекъ перпендикуляра* AE, *поставленнаго изъ середины линѣи* FG *другихъ точекъ, которыя бы равно отстояли отъ* F и G; ибо всякая другая точка, лежащая съ правой или лѣвой стороны перпендикуляра, къ одной изъ тѣхъ точекъ наклоняется, а отъ другой отходитъ.

Изъ сего слѣдуетъ, что линѣя одна бываетъ перпендикулярна къ другой тогда только, когда она пройдетъ чрезъ двѣ такія точки, изъ которыхъ каждая равно будетъ отстоять отъ двухъ точекъ, взятыхъ на той другой линѣѣ.

31. И такъ 1е. *чтобъ поставить перпендикуляръ изъ средины линѣи* AB. (*фиг.* 11), надлежи въ одною ножкою циркула стать въ точку B и отверстіемъ, которое бы было больше половины AB, описать дугу IK; потомъ поставивъ ножку циркула въ A, тѣмъ же самымъ отверстіемъ провести другую дугу LM, которая пересѣчетъ первую въ точкѣ C такъ, что сія точка будетъ находиться въ равномъ растояніи отъ A и B. Наконецъ опредѣливъ такимъ же образомъ другую точку D внизу линѣи AB тѣмъ же или другимъ отверстіемъ циркула, проведи чрезъ точки C и D прямую линѣю CD, которая будетъ къ AB перпендикулярна.

32. 2е. *Ежели изъ точки* E, *взятой внѣ линѣи* AB, *потребуется опустить на ту линѣю перпендикуляръ*. (фиг. 12.).

Стань ножкою циркула въ точку E и раствореніемъ, которое было бы больше кратчайшаго ра-

стоянія до линѣи AB, засѣки ее двумя дугами въ C и D; по томъ поступая какъ и въ первомъ случаѣ, раствореніемъ циркула большимъ половины CD, опиши снизу двѣ дуги, пересѣкающіяся въ точкѣ F; чрезъ F и точку E проведи линѣю EF, которая будетъ перпендикулярна къ AB (30), понеже обѣ точки ея E и F равно отстоятъ отъ двухъ точекъ C и D линѣи AB.

33. Ежели предложено будетъ поставить перпендикуляръ изъ какой нибудь точки E, лежащей на той же самой линѣѣ AB; въ такомъ случаѣ ставь ножкою циркула въ E, и раствореніемъ произвольно взятымъ засѣки съ обѣихъ сторонъ дуги въ точкахъ C и D; по томъ поступай какъ прежде. (*фиг.* 13)

Наконецъ ежели надобно будетъ поставить перпендикуляръ на концѣ B линѣи AB (*фиг.* 15) продолжи линѣю AB и производи дѣйствіе, какъ было показано (33)

34. Когда же потребуетъ нужда провесть нѣсколько перпендикулярныхъ линѣй; то для избѣжанія множества чертъ, употребляется особенной инструментъ *линѣйка съ наугольникомъ.*

35. Какъ на полѣ производится дѣйствіе въ обширности, то на мѣсто циркула употребляются цѣпи или веревки; наблюдая притомъ, чтобъ сіи послѣднія были натягиваемы одинаково и равно при произведеніи дѣйствія. А дабы получить понятіе о способѣ, какъ ихъ употреблять, положимъ для примѣру, что нужно установить платформу на батареѣ (*фиг.* 16)

Поелику платформа есть такое орудіе, на которомъ утверждаются лафетныя колеса при поставленіи пушки на батарею, того ради онѣ должна быть перпендикулярна къ линѣѣ выстрѣла, и слѣдовательно къ той, которая изъ середины амбразуры продолжается.

Почему, для приведенія платформы въ такое положеніе, надлежитъ назначить на поверхности ея

параллельную къ длинѣ линѣю BC, на которой взявши произвольно равныя части AB, AC, привести точку A въ одно положенїе съ линѣею выстрѣла; потомъ привязавъ къ крайнимъ точкамъ B и C двѣ веревки одинакой длины, поворачивать платформу до тѣхъ поръ, пока концы веревокъ соединятся въ одной точкѣ D линѣи выстрѣла. Послѣ чего платформа будетъ перпендикулярна къ линѣи выстрѣла.

## *О Параллельныхъ Линѣяхъ.*

36. Двѣ прямыя линѣи, проведенныя на поверьхности, называются *Параллельными*, когда онѣ не могутъ никогда сойтись между собою, какъ бы далеко мы не представляли ихъ продолженными.

Почему параллельныя линѣи не дѣлаютъ между собою угла.

Равнымъ образомъ двѣ параллельныя линѣи вездѣ находятся въ одинакомъ одна отъ другой растоянїи, то есть въ какомъ бы мѣстѣ не былъ проведенъ между ими перпендикуляръ, онъ будетъ всегда одинаковъ; ибо естьли бы онѣ были въ какомъ мѣстѣ ближе одна къ другой, то должны бы наклониться и наконецъ между собою пересѣчься.

Изъ сихъ понятїй не трудно вывести пять слѣдующихъ предложенїй.

37. 1е. *Когда двѣ параллельныя линѣи* AB *и* CD (фиг. 17.) *пересѣкутся третьею прямою* EF, *то углы* BGE *и*

DHE *или* AGH *и* CHF, *которые онѣ составляютъ съ сею поперечною линѣею при одной сторонѣ, суть равны между собою*; потому что линѣи AB и CD не имѣя никакого между собою наклоненія (36), должны необходимо каждая равно отстоять отъ всякой другой, ихъ пересѣкающей линѣи.

38. 2е. *Углы* AGH и GHD *равны*. Ибо въ предыдущемъ предложеніи видѣли, что AGH равенъ CHF; но CHF (20) равенъ GHD; почему и AGH равенъ GHD.

39. 3е. *Углы* BGE и CHF *равны*. Ибо BGE равенъ AGH (20); но видѣли (37) что AGH равенъ CHF; почему и BGE равенъ CHF.

40. 4е. *Углы* BGH и DHG *или* AGH и CHG *служатъ дополненіемъ одинъ другому*. Ибо BGH есть дополненіемъ BGE, которой (37) равенъ DHG.

41. 5е *Углы* BGE *и* DHF *или* AGE и CHF *суть дополненіемъ одинъ другому*; ибо DHF имѣетъ дополненіемъ DHG, которой (37) равенъ BGE.

42. Каждое изъ сихъ пяти свойствъ имѣетъ мѣсто при всякомъ случаѣ, когда двѣ параллельныя линѣи пересѣкутся третьею поперечною линѣею, и обратно *когда въ*

*двухъ прямыхъ линѣяхъ, пересѣченныхъ третьею, будетъ имѣть мѣсто какое нибудь изъ сихъ пяти свойствъ, то должно заключить, что тѣ линѣи параллельны между собою*; что доказывается совершенно одинакимъ образомъ.

Для большаго впечатлѣнія въ памяти свойствъ предложенныхъ угловъ, дали имъ особенныя названія. Углы BGE и FHC называются *внѣшніе Алтерніи*, потому что они лежатъ съ противныхъ сторонъ линѣи EF и внѣ параллельныхъ. Углы AGH и GHD *внутренніе Алтерніи*; потому что находятся съ различныхъ сторонъ линѣи EF и между параллельными. Углы BGH и DHG называются *внутренніе при одной сторонѣ*, ибо заключаются между параллельными, и лежатъ при одной сторонѣ поперечной линѣи EF. Наконецъ BGE и DHF именуются *внѣшніе при одной сторонѣ*, потому что находятся внѣ параллельныхъ и при одной сторонѣ поперечной.

43. Изъ доказанныхъ свойствъ можно заключить, что *ежели два угла* ABC и DEF (фиг. 18), *обращенные къ одной сторонѣ, будутъ имѣть бока свои параллельными, то они будутъ также и равны между собою*: ибо ежели продолжится бокъ DE такъ, что онъ пересѣчетъ BC въ точкѣ G, то углы ABC и DGC будутъ равны (37), и по той же причинѣ DGC будетъ равенъ DEF; а изъ сего слѣдуетъ, что ABC равенъ DEF.

44. Изъ сихъ же самыхъ свойствъ слѣдуетъ, *что для проведенія чрезъ данную точку* C *линѣи*

CD (фиг. 19) *параллельной къ другой* AB; должно чрезъ точку C продолжить произвольно линѣю CEF, которая бы пересѣкла линѣю AB въ какой нибудь точкѣ E; потомъ провести какъ было показано (14) чрезъ точку C линѣю CD, которая бы сдѣлала съ CE уголъ ECD равной FEB; линѣя CD такимъ образомъ проведенная будетъ параллельна AB (37).

45. Когда надобность требуетъ проводить много параллельныхъ линѣй, то для краткости и избѣжанія чертъ употребляются *параллельныя линѣйки или линѣйка съ наугольникомъ*.

46. *Для проведенія параллельной линѣи къ другой данной на полѣ*, дѣлаютъ обыкновенно обѣ тѣ линѣи перпендикулярными къ третей; *на пр.* ежели бы надобно было провести параллельную линѣю къ фасу бастіона растояніемъ на 200 саженъ, въ такомъ случаѣ на продолженіи фаса того бастіона берется точка F, изъ которой возставляется перпендикуляръ FA длиною въ 200 саженъ, а на концѣ его поставляется другой перпендикуляръ AB, которой будетъ желаемая параллельная линѣя.

Сверхъ сего каждое изъ объявленныхъ пяти свойствъ можетъ подать особливой способъ для проведенія параллельной линѣи.

## *О прямыхъ Линѣяхъ, относящихся къ окружности Круга, и о окружностяхъ въ отношеніи ихъ между собою.*

47. Единообразная излучина круга даетъ право заключить безъ строгаго доказательства.

1е. *Что прямая линѣя можетъ пересѣчь окружность круга въ двухъ только точкахъ, а не болѣе.*

2 е. Что *въ полкругѣ самая большая хорда противуполагается самой большой дугѣ, и обратно.*

*Секансомъ* называется вообще всякая линѣя *на пр.* DE (*фиг.* 21), которая пересѣкаетъ окружность круга въ двухъ точкахъ, и отчасти выходитъ изъ него; *Тангенсъ* или *касательная линѣя* AB есть такая, которая прикасается только къ окружности.

48. *Тангенсъ не можетъ коснуться окружности круга, кромѣ одной точки.* Ибо естьли бы сія линѣя коснулась окружности въ двухъ точкахъ, то должна была бы взойти въ кругъ. Представь себѣ, что отъ тѣхъ двухъ точекъ проведены были бы къ центру два радіуса или равныя линѣи, между которыми поставленъ перпендикуляръ къ линѣи, соединяющей оныя двѣ точки; но какъ сей перпендикуляръ есть короче каждаго изъ радіусовъ, то явствуетъ, что тангенсъ долженъ бы имѣть нѣкоторыя точки ближе къ центру тѣхъ, коими касается окружности; почему онъ вошелъ бы въ кругъ, что не согласно съ опредѣленіемъ, которое мы сдѣлали ему.

Какъ тангенсъ имѣетъ одну только общую точку съ кругомъ, то слѣдуетъ, что

радїусъ CA (*фиг.* 22), проведенной къ точкѣ прикосновенія, есть самая кратчайшая линѣя изъ всѣхъ, какія только къ тангенсу изъ центра проведены быть могутъ, и слѣдовательно перпендикуляренъ къ нему (27); и обратно *во всякой точкѣ* A *круга тангенсъ будетъ перпендикуляренъ къ концу радїуса* CA, *проведеннаго къ той точкѣ.*

49. Изъ сего удобно понять можно, что *для проведенія тангенса къ данной на окружности точкѣ* A, должно къ той точкѣ изъ центра провести радїусъ CA, и на концѣ его поставить перпендикуляръ по предписанному способу (33).

50. *И такъ ежели многїе круги* (фиг. 23), *которыхъ центры находятся на одной прямой линѣѣ* CA, *проходятъ чрезъ одну точку* A; *въ такомъ случаѣ они имѣютъ всѣ вообще тангенсомъ линѣю* TG *перпендикулярную къ* CA, *и взаимно между собою касаются.*

51. Такимъ образомъ для *начерченія круга опредѣленной величины, которой бы касался къ другому данному* BAD (фиг. 24) *въ точкѣ* A, надлежитъ чрезъ центръ C и точку A продолжить съ обѣихъ сторонъ радїусъ CA произвольно; потомъ отъ точки A къ T или V (глядя потому долженъ ли тотъ кругъ вмѣщать въ себѣ данной другой или нѣтъ) положить величину радїуса искомаго круга; наконецъ изъ центра T или V, радїусомъ TA или VA описать окружность EF.

52. *Перпендикулярная линѣя, поставленная изъ середины хорды, проходитъ всегда чрезъ центръ круга и чрезъ середину дуги, противуположенной той хордѣ* (фиг. 25).

Ибо она должна проходить чрезъ всѣ точки, равно отстоящія отъ концовъ A и B (30); а какъ нѣтъ сомнѣнія, что центръ находится въ одномъ разстояніи отъ обѣихъ концовъ A и B, слѣдовательно перпендикуляръ проходитъ чрезъ центръ.

Не меньше того справедливо, что онъ долженъ пройти и чрезъ середину дуги; ибо естьли E есть середина дуги, то въ равныхъ дугахъ AE и BE, имѣющихъ равныя хорды (7), точка E равно отстоитъ отъ A и B; почему перпендикуляръ долженъ проходить чрезъ точку E.

53. Какъ центръ, середина дуги и середина хорды находятся на одной прямой линѣй, то изъ сего заключить надобно, что всякая прямая линѣя, проходящая чрезъ двѣ какія нибудь изъ тѣхъ точекъ, пройдетъ и чрезъ остальную третью.

А какъ не можно провести кромѣ одной перпендикулярной линѣи къ серединѣ хорды, то должно еще заключить, что перпендикулярная линѣя, проходящая чрезъ одну

изъ тѣхъ точекъ, неотмѣнно пройдетъ и чрезъ двѣ прочія.

Изъ сихъ свойствъ выводится.

54. 1е. *Способъ дѣлить уголъ или дугу на двѣ равныя части.*

Чтобъ раздѣлить уголъ BAC (*фиг.* 26) на двѣ равныя части; изъ верху его, какъ изъ центра, произвольнымъ радїусомъ опиши дугу DE; потомъ принявъ попеременно точки D и E за центры, тѣмъ же радїусомъ опиши другїя дуги, пересѣкающїяся между собою въ точкѣ G; отъ точки A къ точкѣ G протяни прямую линѣю AG, которая (30) будучи перпендикулярна къ срединѣ хорды DE, раздѣлитъ пополамъ дугу DIE (52), и слѣдовательно также уголъ BAC: понеже произшедшїе отъ того два угла BAG и CAG имѣютъ (12) мѣрою двѣ равныя дуги DI и EI.

55. 2е. *Способъ начертить окружность круга такъ, чтобъ она прошла чрезъ три точки, данныя не въ прямомъ положенїи.*

Пусть будутъ тѣ точки A, B, C (*фиг.* 27), соедини ихъ прямыми линѣями AB и BC; сїи линѣи сдѣлаются хордами требуемаго круга.

Протяни два перпендикуляра (31) чрезъ середину AB и BC; точка I, гдѣ они пересѣкутся между собою, будетъ центръ. Ибо сей центръ долженъ быть (52) на DE и по той же причинѣ на FG; почему онъ долженъ быть въ пересѣченїи I перпендикуляровъ, потому что I есть одна только точка, общая обѣимъ симъ линѣямъ.

56. Естьли бы потребовалось *сыскать центръ круга или начерченной уже дуги*; то явствуетъ изъ предыдущаго, что для сего стоило бы только взять три точки на окружности или дугѣ произвольно, и поступать какъ было показано.

57. КакЪ для удовлетворенія сего вопроса сыскивается одна только точка I, то должно заключить, что около данныхЪ трехЪ точекЪ не можно начертить кромѣ одного круга, и слѣд. *двѣ окружности круга не могутЪ захватить трехЪ точекЪ, не слившись одна сЪ другою.*

58. *3е. СпособЪ проводить чрезЪ данную точку* B (фиг. 28 *и* 29), *тякую окружность круга, которая бы касалась другой вЪ данной же точкѣ* A.

ЧрезЪ центрЪ C и точку A, гдѣ нужно быть прикосновенію, проведи радіусЪ CA, которой продолжи произвольно сЪ той или другой стороны; точку A сЪ точкою B, чрезЪ которую должно проводить требуемую окружность, соедини прямою линѣю AB, изЪ середины ея протяни перпендикулярЪ MN, которой пересѣчетЪ AC или ея продолженіе вЪ D. Точка D будетЪ центрЪ, а AD или BD радіусЪ желаемаго круга; ибо какЪ искомая окружность вопервыхЪ должна пройти чрезЪ точку A и точку B, то центру ея надлежитЪ быть на линѣи MN (52), а какЪ во вторыхЪ таже окружность должна коснуться вЪ A, то центрЪ ея долженЪ находиться (50) на линѣѣ CA или на ея продолженіи; слѣдовательно онЪ находится вЪ точкѣ пересѣченія CA сЪ MN.

59. Естьли вмѣсто окружности дана была бы прямая линѣя, и кЪ которой надлежало бы сдѣлать прикосновеніе кЪ точкѣ A (*фиг.* 30) кругомЪ, проходящимЪ чрезЪ данную другую точку B; вЪ такомЪ случаѣ дѣйствіе рѣшенія остается тоже, сЪ тѣмЪ только отличіемЪ, что на прямой линѣѣ изЪ данной точки A надлежитЪ воставить перпендикулярЪ AC или AD, какЪ нужда того потребуетЪ.

60. 4е. *Двѣ параллельныя хорды* AB *и* CD (фиг. 31) *заключаютЪ между собою равныя дуги* AC и BD.

Ибо перпендикулярЪ GI, опущенный изЪ середины G линѣи AB, долженЪ (52) раздѣлить пополамЪ каждую изЪ двухЪ дутЪ AIB и CID, потому что линѣя GI перпендикулярна какЪ кЪ AB, такЪ и кЪ параллельной ей CD; а когда отЪ равныхЪ дугЪ AI и BI отымутся равныяжЪ CI и DI, то и оставшіяся дуги AC и DB должны быть равны.

ИзЪ сего заключимЪ, что вЪ тангенсѣ HK, проведенномЪ параллельно сЪ хордою AB, точка прикосновенія опредѣляетЪ точно середину дуги AIB.

61. ИзЪясненныя предложенія (50, 58 и 59) имѣютЪ употребленіе вЪ Фортификаціи и при чертежѣ огнестрѣльныхЪ и другихЪ многихЪ орудій вЪ Артиллеріи; тамЪ часто случается нужда вЪ дугахЪ, долженствующихЪ или касаться взаимно, или касаться кЪ прямымЪ линѣямЪ, и проходить чрезЪ данныя точки.

## *О УглахЪ, относящихся кЪ Кругу.*

62. Мы видѣли уже (12), какая вообще есть мѣра угловЪ. ЧтожЪ теперь намѣрены изЪяснить, то симЪ не покажемЪ новаго способа ихЪ измѣрять, но предложимЪ только нѣкоторыя свойства, могущія принести намЪ пользу вЪ послѣдствіи или для рѣшенія задачь, или для сокращенія доказательствЪ.

63. *Уголъ* MAN (*фиг.* 32 *и* 33), *котораго верхъ находится при окружности, а бока состоятъ изъ двухъ хордъ или изъ тангенса и хорды, имѣетъ всегда мѣрою половину дуги* BFED, *которая заключается между его боками.*

Когда центръ C находится между боками угла, въ такомъ случаѣ проведи чрезъ центръ C діаметръ FH параллельно съ бокомъ AM, и діаметръ GE параллельно съ бокомъ AN; произшедшій отъ того уголъ FCE (43) будетъ равенъ углу MAN; почему сей послѣдній долженъ имѣть ту же мѣру, какую и уголъ, котораго верхъ находится при центрѣ, то есть онъ будетъ имѣть мѣрою дугу FE; теперь слѣдуетъ показать только, что дута FE есть половина дуги BFED. Но дута BF равна AH (60) по причинѣ параллельныхъ линѣй AM и HF, и дуга ED равна AG по причинѣ параллельныхъ AN и GE; почему ED съ BF равны AG съ AH или GH; но GH будучи мѣрою угла GCH, должна быть равна FE, мѣрѣ угла FCE равнаго (20) углу GCH; и такъ BF съ ED равны FE; слѣдовательно FE есть половина BFED, и уголъ MAN имѣетъ мѣрою половину дуги BFED, которая заключается между его боками.

Но ежели центрЪ случится внѣ боковЪ, какЪ видѣть можно вЪ углѣ MAN (*фиг.* 37), то отЪ того не меньше справедливо, что сей уголЪ измѣряется половиною дуги BD, которая содержится между его боками. Ибо проведя тангенсЪ AE, уголЪ MAN будетЪ равенЪ MAE безЪ NAE, почему онЪ измѣряется разностію мѣрЪ двухЪ сихЪ угловЪ; то есть (понеже центрЪ находится между ихЪ боками) половиною BFA безЪ половины DFA, или половиною дуги BD.

64. ИзЪ сего слѣдуетЪ, что 1 е. *всѣ углы* BAE, BCE, BDE, (фиг. 34), *которыхъ верхи находятся при окружности, а бока стоятъ на одной дугѣ или на равныхъ, будутъ равны между собою.* Потому что каждой изЪ нихЪ измѣряется половиною одной и той же дуги BE (63).

65. 2 е. *Всякой уголъ при окружности* BAC (фиг. 35), *котораго бока стоятъ на концахъ поперешника, будетъ прямой или* 90 *градусовъ*; ибо вЪ такомЪ случаѣ онЪ заключаетЪ между своими боками половину окружности BOC, равную 180 градусамЪ; а какЪ сей уголЪ долженЪ имѣть мѣрою половину дуги, содержащейся между его боками (63), почему онЪ будетЪ 90 градусовЪ.

66 Доказанное предложеніе (65) можетъ между прочими употребленіями имѣть два слѣдующія:

67. 1е. *Воставить перпендикуляръ на концѣ В линѣи FB (фиг. 36).*

Возьми по изволенію точку D внѣ линѣи FB, и растворенiемъ циркула, равнымъ растоянію DB, опиши окружность ABCH, которая пересѣчетъ FB въ какой нибудь точкѣ A, отъ точки A чрезъ центръ D протяни поперешникъ ADC; отъ точки C, гдѣ діаметръ прорѣзываетъ окружность, проведи къ точкѣ B линѣю CB, которая будетъ перпендикулярна къ FB. Ибо въ углѣ CBA, которой она составляетъ съ линѣею FB, верхъ находится при окружности, а бока стоятъ на концахъ поперешника AC; почему уголъ сей прямой (65), и CB должна быть перпендикулярна къ FB.

68. 2е. *Изъ точки E, данной внѣ круга ABD (фиг. 38), провести къ окружности его касательную линѣю.*

Соедини центръ C и точку E прямою линѣею CE, опиши около CE, какъ діаметра, окружность CAED, она прорѣжитъ окружность ABD въ двухъ точкахъ A и D; отъ каждой изъ нихъ проведи къ точкѣ E линѣи DE и AE, которыя будутъ желаемые тангенсы.

Дабы увѣриться, что сіи линѣи дѣйствительно тангенсы, то стоитъ только провести радіусы CD и CA; оба угла CDE и CAE находятся при окружности, и бока каждаго стоятъ на концахъ поперешника CE; почему они (65) прямые; а для сего DE и AE перпендикулярны къ концамъ радіусовъ CD и CA; слѣдовательно (49) сіи линѣи суть тангенсы въ точкахъ D и A.

69. Естьли въ углѣ MAN продолжится бокъ BA (*фиг.* 32) неопредѣленно до I, то

происходитъ отъ сего уголъ NAI также при окружности; но какъ бока его не состоятъ изъ обѣихъ хордъ, а изъ одной только и продолженія другой, то для сего онъ не будетъ имѣть мѣрою половины дуги AD, заключенной между его боками, но половину суммы двухъ дугъ AD и AB, противоположенныхъ боку AD и боку IA продолженному; ибо DAI съ DAB равны двумъ прямымъ угламъ, оба сіи углы вмѣстѣ должны имѣть мѣрою половину всей окружности; но (63) доказано было, что DAB имѣетъ мѣрою половину дуги DB; изъ чего слѣдуетъ, что уголъ DAI измѣряется половиною дугъ DA и AB.

70. *Уголъ* BAC (фиг. 39), *коего верхъ находится между центромъ и окружностію, измѣряется половиною дуги* BC, *на которой бока его стоятъ, съ половиною дуги* DE, *заключенной между тѣми же продолженными боками.*

Отъ точки D, гдѣ продолженная CA пересѣкаетъ окружность, проведи DF параллельно AB; уголъ BAC (37) равенъ FDC, и слѣдовательно одинакую имѣетъ съ нимъ мѣру, то есть половину дуги FBC (63) или половину BC съ половиною BF, или по при-

чинѣ равенства BF съ DE (60) половину BC съ половиною DE.

71. *Уголъ* BAC (фиг. 40), *коего верхъ находится внѣ окружности, имѣетъ мѣрою половину дуги* BC, *на которой бока его стоятъ, безъ половины дуги* ED, *содержащейся между его боками.*

Отъ точки D, гдѣ CA прорѣзываетъ окружность, проведи DF параллельную AB.

Уголъ BAC равенъ FDC (37), почему имѣетъ одинакую съ нимъ мѣру, то есть половину дуги CF, или половину CB безъ половины BF, или по причинѣ равенства дуги BF (60) съ ED половину CB безъ половины ED.

72. И такъ явствуетъ, что когда бока какого нибудь угла заключаются между дугою окружности, и сей уголъ имѣетъ мѣрою половину той дуги, верхъ его необходимо долженъ быть при окружности; въ противномъ же случаѣ, есть ли бы онъ имѣлъ его индѣ, доказанныя предложенія (70 и 71) показали бы, что онъ не имѣетъ мѣрою половины той дуги. Почему какимъ бы образомъ не былъ положенъ уголъ, когда бока его (*фиг.* 34) проходятъ чрезъ однѣ и тѣ же точки B и E окружности, то верхъ его будетъ всегда находиться въ какой нибудь точкѣ окружности же. Изъ сего слѣдуетъ, что ежели двѣ линейки AM и AN (*фиг.* 41), укрѣпленныя одна съ другой въ точкѣ A, будутъ обращаться на поверхности, прикасаясь непрестанно къ неподвижнымъ точкамъ B и C, то верхъ A опишетъ окружность круга, которая пройдетъ чрезъ двѣ точки B и C.

Сей способъ можетъ служить 1 е. какъ *начертить такой кругъ, которой бы окружностію своею прошелъ чрезъ данныя три точки* B, A, C, (фиг. 41) *когда не можно приближиться къ центру*. Надлежитъ соединить точку A съ точками B и C двумя линѣйками AM и AN; укрѣпить сіи линѣйки такъ, чтобъ онѣ не расходились потомъ передвигать уголъ BAC прикасаясь непрестанно линѣйками къ точкамъ B и C, отъ чего верхъ A назначитъ желаемую окружность.

2 е *Начертить дугу круга требуемаго числа градусовъ, которая бы проходила чрезъ данныя двѣ точки* B и C; что весьма быть можетъ полезно въ практикѣ.

Для сего изъ 360 градусовъ вычти число градусовъ требуемой дуги, и взявши половину изъ остатка, раствори линѣйки такъ, чтобъ онѣ сдѣлали уголъ равной той половинѣ. Потомъ укрѣпивъ сіи линѣйки между собою, обращай ихъ какъ было показано, около неподвижныхъ точекъ B и C; дуга BAC, обведенная такимъ образомъ верхомъ A, будетъ желаемаго числа градусовъ.

Удобно видѣть можно, что уголъ BAC дѣлается равенъ половинѣ остатка, потому что онъ имѣетъ мѣрою половину дуги BC, которая есть разность между цѣлою окружностью и дугою BAC.

## *О прямыхъ Линѣяхъ, заключающихъ въ себѣ пространство.*

73. Дабы ограничить пространство, для сего не меньше потребно трехъ прямыхъ линѣй; и въ такомъ случаѣ пространство сіе называется *прямолинѣйной треугольникъ* или просто *треугольникъ*. ABC (*фиг.* 42) есть треугольникъ, потому что простран-

ство ограничено тремя прямыми линѣями, или справедливѣе по тому, что эта фигура имѣетъ въ себѣ три угла.

Легко увѣриться можно, что во всякомъ треугольникѣ два какіе нибудь бока вмѣстѣ взятые больше остальнаго третьяго; на пр. AB съ BC больше AC, потому что AC будучи прямая линѣя, простирающаяся отъ A до C, есть кратчайшій путь.

Треугольникъ, въ которомъ всѣ три бока равны, называется *равносторонной треугольникъ* (фиг. 44).

Тотъ же, въ которомъ два только бока равны, *равнобедренной.* (фиг. 45)

А въ которомъ всѣ бока находятся разные, именуется *разносторонной.* (фиг. 43)

74. *Сумма трехъ угловъ всякаго прямолинѣйнаго треугольника равна двумъ прямымъ угламъ или 180 градусамъ.*

Продолжи бокъ AC до E неопредѣленно (*фиг.* 43), и проведи линѣю CD параллельно къ боку AB.

Уголъ BAC равенъ углу DCE (37), потому что линѣи AB и CD параллельны. Уголъ ABC равенъ BCD по второму свойству параллельныхъ (38); почему два угла

ВАС и АВС, вмѣстѣ взятые, равны двумъ угламъ BCD и DCE, то есть углу ВСЕ; но ВСЕ есть дополненіе (17 и 19) ВСА; чего для два угла ВАС и АВС вмѣстѣ будутъ также дополненіемъ угла ВСА. Слѣдовательно всѣ три угла сіи вмѣстѣ равны 180 градусамъ.

75. Сдѣланное доказательство увѣряетъ также, что и *уголъ внѣшній* ВСЕ, *произшедшій въ треугольникѣ* АВС *отъ продолженія его бока* АС *до* Е, *равенъ суммѣ двухъ внутреннихъ* ВАС *и* АВС, *ему противуположенныхъ*.

Изъ сказаннаго (74) заключимъ: 1е. что *прямолинѣйной треугольникъ не можетъ имѣть больше одного прямаго угла*, и называется въ такомъ случаѣ *прямоугольной треугольникъ* (фиг. 46).

2е. *Онъ не можетъ также имѣть больше одного тупаго*; и называется *тупоугольный треугольникъ* (фиг. 47).

3е. *Но углы острые можетъ имѣть всѣ*; и тогда именуется *остроугольной треугольникъ* (фиг. 45).

4е. Что *знавши въ треугольникѣ два угла порознь или сумму ихъ, будетъ извѣстенъ и третій*, когда вычтешь

изъ 180 градусовъ сумму извѣстныхъ угловъ.

5 е. Что *когда два угла какого нибудь треугольника равны двумъ угламъ другаго, то и третій неотмѣнно будетъ равенъ третьему*; ибо три угла каждаго треугольника составляютъ вмѣстѣ 180 градусовъ.

6 е. Что *въ прямоугольномъ треугольникѣ оба острые угла суть дополненіемъ одинъ другому* (21) *къ 90 градусамъ*; ибо когда одинъ изъ угловъ треугольника сего есть 90 градусовъ, то не больше же 90 градусовъ остается для двухъ прочихъ вмѣстѣ.

76. Мы видѣли (55), что можно обвести окружность круга около трехъ точекъ находящихся не на прямой линѣи, заключимъ же изъ того что. . .

Можно всегда обвести окружность круга около верховъ трехъ угловъ каждаго треугольника, что иначе называется *описать кругъ около треугольника*.

77. А изъ сего удобно заключить можно 1 е. Что *естьли два угла треугольника равны, то и противоположенные ихъ бока будутъ также равны*; и обратно *естьли два бока треугольника рав-*

*ны, то и углы противуположенные тѣмъ бокамъ будутъ равны.*

Ибо начертивши окружность около трехъ угловъ ABC (*фиг.* 48), естьли углы ABC и ACB будутъ равны, то и дуги ADC и AEB, которыхъ половины служатъ имъ измѣреніемъ (63), будутъ также по необходимости равны; и потому (7) хорды AC и AB будутъ равны. И обратно естьли бока AC и AB равны, то и дуги ADC и AEB будутъ равны; и такъ углы ABC и ACB, которые имѣютъ измѣреніемъ половину сихъ дугъ, будутъ равны.

Слѣдовательно въ равносторонномъ треугольникѣ всѣ углы равны между собою и каждой составляетъ треть 180 град. или 60°.

78. 2 е. *Во всякомъ треугольникѣ* ABC (фиг. 49) *самой большой бокъ противуполагается самому большому углу, а самой меньшой бокъ самому меньшому углу, и обратно.*

Ибо естьли уголъ ABC есть больше угла ACB, то дуга AC будетъ больше дуги AB, и слѣдовательно хорда AC больше хорды AB; обратное предложеніе такимъ же образомъ доказывается.

## *О равенствѣ Треугольниковъ.*

79. Многія находятся предложенія, которыхъ доказательство основывается на равенствѣ треугольниковъ; и потому за нужное почитаемъ показать здѣсь свойства, по которымъ должно узнавать сіе равенство. Ихъ находится числомъ три.

80. *Два треугольника совершенно бываютъ равны, когда они имѣютъ по одному равному углу, заключающемуся между двумя равными боками.*

Пусть уголъ B треугольника BAC (*фиг.* 50) будетъ равенъ углу E треугольника EDF, бокъ AB равенъ боку DE, а бокъ BC боку EF: то вотъ какимъ образомъ можно узнать почему сіи два треугольника равны между собою.

Представимъ, что фигура ABC была бы положена на фигуру DEF, такъ что бокъ AB легъ бы на равномъ себѣ DE; и такъ когда уголъ B равенъ углу E, то бокъ BC закроетъ EF а точка C упадетъ въ точку F, понеже бокъ BC принимаемъ мы равнымъ EF; но какъ точка A находится въ D, а точка C въ F, то явствуетъ изъ сего, что AC закроетъ совершенно DF, и слѣдовательно оба треугольники сходны во всѣхъ частяхъ между собою.

И такъ, чтобъ *начертить треугольникъ, котораго извѣстны два бока съ заключающимся между ими угломъ*, должно протянуть (*фиг.* 50) линѣю DE, равную которому нибудь изъ извѣстныхъ боковъ; на сей линѣи сдѣлать (14) уголъ DEF равный данному углу, и линѣѣ EF равную второму извѣстному боку; потомъ провести DF, отъ чего произойдетъ требуемый треугольникъ.

81. *Два треугольника совершенно бываютъ между собою равны, когда они имѣютъ по одному боку равному, лежащему при двухъ равныхъ углахъ.*

Пусть бокъ AB (*фиг.* 50) будетъ равенъ боку DE, уголъ B равенъ углу E, а уголъ A равенъ углу D.

Представимъ, что бокъ AB положенъ на бокъ DE; BC закроетъ совершенно EF потому, что уголъ B равенъ углу E; равнымъ образомъ понеже уголъ A равенъ углу D, бокъ AC закроетъ DF; почему AC и BC сойдутся въ одной точкѣ F; и слѣдовательно два треугольника сіи равны между собою.

И такъ, чтобъ *начертить треугольникъ, котораго извѣстны бокъ и два лежащіе при немъ угла*, должно провести (*фиг.* 50) линѣю DE равную данному боку; по концамъ сей линѣи сдѣлать (14) углы E и D равные двумъ извѣстнымъ угламъ; такимъ образомъ бока EF и DF сихъ угловъ составятъ изъ себя требуемый треугольникъ.

82. Предыдущее предложеніе (81) можетЬ служить доказательствомЬ что *части* AC *и* BD (*фиг.* 51) *двухЪ параллельныхЪ линѣй, заключающіяся между двумя другими параллельными линѣями* AB *и* CD, *суть равны между собою.*

Опусти два перпендикуляра AE и BF, углы AEC и BFD будутЬ равны, потому что они прямые; а какЬ AC и BD, AE и BF между собою параллельны, то уголЬ EAC равенЬ углу FBD (43), также AE равно BF (36); слѣдовательно два треугольника AEC и BFD равны, потому что они имѣютЬ по одному боку равному, лежащему при двухЬ равныхЬ углахЬ; и такЬ AC равно BD.

Можно также доказать, что естьли AC равна и параллельна BD, то AB будетЬ равна и параллельна CD; ибо кромѣ того, что бокЬ AC равенЬ BD и углы какЬ вЬ E, такЬ и F прямые; уголЬ ACE будетЬ равенЬ BDF, понеже AC есть параллельна BD (38); слѣдовательно (75) третій уголЬ EAC будетЬ равенЬ третьему углу DBF, почему два треугольника, имѣющіе по одному равному боку, лежащему при двухЬ равныхЬ углахЬ, будутЬ равны; слѣдователь-

но AE равна BF, и потому двѣ линѣи AB и CD параллельны; а изъ сказаннаго (82) слѣдуетъ, что онѣ и равны.

83. *Два треугольника совершенно бываютъ равны, когда они имѣютъ по три бока равныхъ.*

Пусть бокъ AB (*фиг.* 50) будетъ равенъ боку DE, бокъ BC равенъ боку EF, а бокъ AC равенъ боку DF.

Представивъ, что бокъ AB положенъ на DE, а плоскость BAC закрываетъ плоскость фигуры EDF, утверждаю, что точка C должна упасть въ точку F.

Опиши изъ точекъ D и E, какъ изъ центровъ, полупоперешниками DF и EF двѣ дуги IK и HG, пересѣкающіяся въ F; изъ сего явствуетъ, что точка C должна упасть въ какую нибудь точку дуги IK, ибо AC равно DF; по той же причинѣ точка C должна упасть въ какую нибудь точку GH, понеже BC равно EF; и такъ она должна неминуемо упасть въ точку F, которая есть одна только общая точка въ двухъ дугахъ, пересѣченныхъ съ противоположенной стороны DE; слѣдовательно два треугольника совершенно сходны, и потому равны между собою.

И такъ, чтобъ *начертить треугольникъ*, *котораго извѣстны три бока*, должно (*фиг.* 50) провести прямую линѣю DE равную одному изъ извѣстныхъ боковъ; изъ точки D какъ центра полупоперешниковъ равнымъ второму данному боку описать дугу IK; такимъ же образомъ изъ точки E, полупоперешникомъ равнымъ третьему извѣстному боку, описать дугу GH; на конецъ изъ точки пересѣченія F, провести къ точкамъ G и E прямыя линѣи FD и FE.

## *О Многоугольникахъ.*

84. Фигура, состоящая изъ многихъ боковъ, называется вообще *многоугольникомъ*.

Когда она имѣетъ три бока, тогда называется.

*Треугольникъ*
когда имѣетъ 4 *Четвероугольникъ*
5 *Пятіугольникъ*
6 *Шестіугольникъ*
7 *Семіугольникъ*
8 *Осьміугольникъ*
9 *Девятіугольникъ*
10 *Десятіугольникъ*
11 *Одиннадцатіугольникъ*
12 *Двенадцатіугольникъ*

И такъ далѣе, получая названіе свое отъ числа угловъ.

*Исходящій уголъ* называется тотъ, котораго верхъ находится внѣ фигуры; *фигура* 52 имѣетъ всѣ углы исходящіе.

*Входящій уголъ* есть тотъ, котораго верхъ входитъ въ фигуру: уголъ CDE (*фиг.* 53) есть уголъ входящій.

Свойства многоугольниковъ весьма употребительны въ Фортификаціи. Названіе *исходящаго* и *входящаго угловъ* относится особенно до угловъ покрытаго пути и линей ретраншемента.

*Діагональю* называется такая линѣя, которая проводится отъ одного угла къ другому во всякой фигурѣ. AD, AC (*фиг.* 52) суть діагонали.

85. *Всякой многоугольникъ можетъ раздѣленъ быть діагональми, проведенными изъ одного какого нибудь его угла, на столько трегольниковъ безъ двухъ, сколько онъ имѣетъ боковъ.*

Изображеніе *фигуръ* 52 и 53 довольно показываетъ, что сіе справедливо.

86. И такъ, *чтобъ узнать сумму всѣхъ внутреннихъ угловъ какого нибудь многоугольника, должно умножить* 180° *на число боковъ его безъ двухъ.*

Ибо видѣть можно, что сумма внутреннихъ угловъ въ многоугольникахъ ABCDE (*фиг.* 52), и ABCDEF (*фиг.* 53) есть тажъ самая, какая находится въ углахъ треугольниковъ ABC, ACD и проч. а какъ

сумма трехъ угловъ каждаго изъ сихъ треугольниковъ составляетъ 180°; слѣдовательно должно умножить 180° на столько разъ, сколько находится треугольниковъ, то есть (85) на столько разъ безъ двухъ, сколько боковъ въ многоугольникѣ.

Дабы уголъ CDE *въ фигурѣ* 53 могъ относиться къ предыдущему предложенію, то должно почитать его не частію CDE внѣшнею многоугольника, но частію CDE, состоящею изъ угловъ ADE и ADC. Хотя сей уголъ имѣетъ больше 180°, совсѣмъ тѣмъ долженъ быть угломъ, какъ и всякой другой имѣющій меньше 180°; ибо уголъ вообще есть ничто другое, какъ количество, которое линѣя проходитъ обращаясь около неподвижной точки.

87. *Естьли въ многоугольникѣ, которой не имѣетъ входящихъ угловъ, продолжатся всѣ бока къ одной сторонѣ, то сумма всѣхъ внѣшнихъ угловъ состоять будетъ изъ* 360°, *сколько бы впрочемъ многоугольникъ не имѣлъ у себя боковъ.* Смотри (фиг. 52).

Ибо всякой уголъ внѣшній есть дополненіемъ углу внутреннему, съ нимъ смѣжному; а какъ всѣ углы внутренніе и внѣшніе равны 180°, взятымъ столько разъ, сколько находится боковъ; но (86) внутренніе углы разнствуютъ отъ сей суммы только 180° два раза взятыми, или 360°; и такъ для однихъ внѣшнихъ остается 360°.

88. Многоугольникъ называется *правильнымъ* тотъ, у котораго всѣ углы и всѣ бока равны. (*фиг.* 54).

И такъ весьма легко узнать можно сколько составляетъ градусовъ каждый внутреннїй уголъ правильнаго многоугольника; ибо сыскавши, какъ было показано (86) число градусовъ всѣхъ вмѣстѣ внутреннихъ угловъ, стоитъ только потомъ раздѣлить сумму сїю на число боковъ; на пр. естьли надобно узнать сколько градусовъ заключаетъ въ себѣ каждой внутреннїй уголъ правильнаго пятїугольника; то, какъ у него находится пять боковъ, должно умножить 180° на пять безъ двухъ, то есть на три, что производитъ 540° для суммы пяти внутреннихъ угловъ; но понеже они всѣ равны, то каждый уголъ долженъ составлять пятую часть изъ 540°, то есть 108°.

89. Изъ опредѣленія, сдѣланнаго правильному многоугольнику, слѣдуетъ, что *окружность круга можетъ всегда описана быть около верховъ всѣхъ угловъ его.*

Доказано (55), что можно описать окужность круга около трехъ точекъ A,B,C, (*фиг.* 54) почему утверждаю, что она проходя чрезъ тѣ точки, должна проходить также чрезъ конецъ бока CD; ибо весьма легко можно доказать, что точка D, въ которой сія окружность должна пересѣчься съ бокомъ CD, удалена отъ C на количество равное BC; понеже уголъ ABC равенъ BCD, дуги AEC и BFD, которыхъ полови-

ны служатъ измѣреніемъ симъ угламъ (63), должны быть также равны; естьли же отнять у каждаго угла общую дугу AFED, то оставшіяся дуги CD и AB должны быть равны, слѣдовательно (7) и хорды CD и AB суть равны; и такъ точка D, въ которой бокъ CD сходится съ окружностью проходящею чрезъ A,B,C, есть та же, что верьхъ угла многоугольника; тоже самое доказательство служитъ въ углахъ E и F.

90. И такъ слѣдуетъ, что для описанія круга около правильнаго многоульника нужно начертить кругъ, котораго бы окружность коснулась верхамъ трехъ его угловъ; а сіе сдѣлай показаннымъ образомъ (55).

91. *Всѣ перпендикулярныя линѣи, опущенныя изъ центра правильнаго многоугольника на бока его, суть равны между собою.* Ибо какъ сіи перпендикуляры OH, OL падаютъ въ средину каждаго бока (52), то линѣи AH и AL равны между собою; но AO есть общая двумъ треугольникамъ OHA и OLA, сверхъ того въ треугольникахъ ABO, AOF по причинѣ равенства всѣхъ боковъ, углы OAH и OAL должны быть равны; и такъ два треугольника OAH и OAL, заключая между двумя равными боками по одному равному углу, суть равны (80). Слѣдовательно OH равно OL.

И потому естьли полупоперешникомѣ равнымѣ одной изѣ сихѣ перпендикулярныхѣ линѣй, опишешь окружность; то она будетѣ касаться всѣмѣ бокамѣ многоугольника. Сія окружность называется *вписанною* вѣ многоугольникѣ.

Перпендикулярѣ OH, OL и проч. называется *Апотемою* многоугольника.

92. Изѣ сего явствуетѣ, что ежели изѣ центра правильнаго многоульника проведутся линѣи ко всѣмѣ угламѣ, то онѣ будутѣ заключать между собою равные углы, понеже углы сіи измѣряются дугами, противоположенными равнымѣ хордамѣ; *и такѣ для сысканія угла при центрѣ какого нибудь правильнаго многоугольника, надлежитѣ раздѣлить 360 градусовѣ на число боковѣ его.* Ибо равные сіи углы имѣютѣ всѣ вмѣстѣ мѣрою цѣлую окружность. На пр. вѣ шестіугольникѣ каждой уголѣ при центрѣ будетѣ шестая часть 360 градусовѣ, то есть будетѣ 60 градусовѣ.

93. И такѣ *бокѣ правильнаго шестіугольника равенѣ полупоперешнику круга, описаннаго около его.* Ибо по проведеніи радіусовѣ AO и BO, треугольникѣ AOB будетѣ равнобедренной, и слѣдовательно (77) углы

ВАО и АВО будутъ равны между собою; но какъ уголъ АОВ есть 60 градусовъ, то для прочихъ двухъ остается 120 градусовъ (75), почему для каждаго по 60 градусовъ; и такъ три угла сіи равны между собою, и треугольникъ АОВ долженъ быть равносторонной (77); чего для бокъ АВ равенъ радіусу АО.

94. *Сіе послѣднее предложеніе можетъ служить способомъ для раздѣленія окружности на дуги 15 градусовъ.*

Проведи два діаметра АВ и DE (*фиг.* 55) перпендикулярно одинъ къ другому, и взявши отверстіе циркула равное радіусу СЕ, перенеси его по перемѣнно изъ Е въ F и изъ А въ G; четверть окружности АЕ будетъ симъ способомъ раздѣлена на три равныя части AF, FG, GE: ибо какъ отверстіе циркула взято равное полупоперешнику, то слѣдуетъ изъ сказаннаго (93), что дуга EF есть 60 градусовъ; но ЕА есть 90 градусовъ, почему AF должна быть 30 градусовъ. По тойже причинѣ AG есть 60 градусовъ; а какъ АЕ есть 90 градусовъ, то для GE остается 30 градусовъ; наконецъ ежели изъ цѣлой дуги АЕ 90 градусовъ вычтешь дуги AF и GE равныя обѣ вмѣстѣ 60 градусамъ, остальная дуга FG будетъ 30 градусовъ. Раздѣливъ такимъ образомъ четверть окружности на дуги 30 градусовъ, легко послѣ того получить можешь дугу 15 градусовъ, когда раздѣлишь пополамъ каждую изъ дугъ AF, FG и GE показаннымъ образомъ (54). Поступай равно и съ прочими тремя четвертями AD, DB и BE.

Естьли пожелаешь продолжать такое раздѣленіе до дуги одного градуса, то надлежитъ въ такомъ случаѣ поступать приноравливаясь, потому что для сего не находится настоящаго Геометрическаго способа. Есть однакожъ Геометрической способъ для достиженія прямо до дуги 3 градусовъ; но какъ предложенія къ тому сопровождающія, не мо-

гутъ принести намъ сверьхъ сего никакой другой пользы, то мы и не намѣрены о нихъ говорить.

Замѣтимъ здѣсь только то, что мы разумѣемъ чрезъ Геометрическія дѣйствія тѣ способы, которыми производится исполненіе какого нибудь требованія *опредѣленнымъ* числомъ дѣйствій съ помощію линѣйки и циркула.

## *О пропорціональныхъ Линѣяхъ.*

95. Прежде нежели приступимъ къ изъясненію пропорціональныхъ линѣй, сдѣлаемъ нѣкоторыя предложенія о пропорціяхъ, непосредственно происпекающія изъ истинъ, преподанныхъ Ариѳметикою. Но дабы сократить рѣчь, мы намѣрены впередъ употреблять знаки вмѣсто нѣкоторыхъ дѣйствій; на примѣръ для означенія сложенія мы будемъ писать $+$, и выговаривать его *съ* или *сложенное*; такимъ образомъ $4 + 3$ означитъ 4 сложенное съ 3, или просто 4 съ 3. Равномѣрно для показанія вычитанія употребимъ знакъ $-$, которой отвѣчать будетъ словамъ *безъ* или *вычтенное*; на примѣръ $5 - 2$ означитъ 5 безъ 2, или то, что изъ 5 слѣдуетъ вычесть 2. Какъ не всегда состоитъ дѣло въ самомъ исполненіи дѣйствія, но больше въ разсужденіяхъ о его обстоятельствахъ, того ради полезнѣе иногда представлять его, нежели производить для него рѣшеніе.

Умноженіе изобразимъ симъ знакомъ ×, которой отвѣчать будетъ словамъ *умноженное на*; почему 5×4 означитъ 5 умноженное на 4.

Дѣленіе представлять будемъ въ видѣ дроби, поставляя дѣлителя подъ дѣлимымъ, на пр. $\frac{12}{7}$ означитъ 12 раздѣленное на 7.

Предположивъ сіе, видѣли мы (Ариѳ. 175), что во всякой пропорціи сумма предыдущихъ членовъ къ суммѣ послѣдующихъ содержится такъ, какъ предыдущій членъ къ своему послѣдующему: и тоже сравненіе дѣлали разности предыдущихъ съ разностью послѣдующихъ.

96. Изъ сего можемъ заключить, что *во всякой пропорціи сумма предыдущихъ членовъ содержится къ суммѣ послѣдующихъ, какъ разность предыдущихъ къ разности послѣдующихъ*; ибо ежели въ пропорціи 48 : 16 = 12 : 4 можетъ быть,

$$48 + 12 : 16 + 4 = 12 : 4$$
$$\text{и } 48 - 12 : 16 - 4 = 12 : 4$$

То явствуетъ (по причинѣ взаимнаго отношенія 12 : 4), что можетъ также быть 48 + 12 : 16 + 4 = 48 − 12 : 16 − 4. За-

ключеніе такое служитъ для всякой другой пропорціи.

97. Въ сей же пропорціи, переставивъ третій членъ на мѣсто втораго, а второй на мѣсто третьяго, что позволено (Ариѳ. 171), можно утвердить также, что *сумма предыдущихъ членовъ содержится къ разности ихъ, какъ сумма послѣдующихъ къ разности сихъ послѣднихъ*.

98. Ежели въ пропорціи $48 : 16 = 12 : 4$ перемѣнятся мѣста двухъ среднихъ членовъ, какъ *на пр.* $48 : 12 = 16 : 4$, то по доказанному предложенію (96) будетъ $48 + 16 : 12 + 4 = 48 - 16 : 12 - 4$. Почему изъ сей посылки въ разсужденіи пропорціи $48 : 16 = 12 : 4$ можно вывести слѣдующее предложеніе, что *сумма первыхъ двухъ членовъ къ суммѣ двухъ послѣднихъ содержится такъ, какъ разность двухъ первыхъ къ разности двухъ послѣднихъ*; или (переставивъ опять третій членъ на мѣсто втораго, а второй на мѣсто третьяго) *сумма двухъ первыхъ членовъ къ разности ихъ, такъ сумма двухъ послѣднихъ къ разности сихъ же послѣднихъ*.

99. *Естьли содержаніе состоитъ изъ произведенія многихъ другихъ содержа-*

*ній, то можно на мѣсто каждаго сложнаго содержанія поставить другое, изображенное иными членами, лишь бы сіи члены показывали одинаков содержаніе съ тѣми, вмѣсто которыхъ пріемлются.*

На примѣръ въ содержаніи $6 \times 10 : 2 \times 5$, можно на мѣсто множимыхъ 6 и 2 поставить 3 и 1; понеже сложенное содержаніе $3 \times 10 : 1 \times 5$ будетъ одинаково съ содержаніемъ $6 \times 10 : 2 \times 5$. Ибо когда справедливо, что $6 : 2 = 3 : 1$, то можно безъ всякой перемѣны пропорціи сей (Ариѳ. 173) умножить предыдущіе члены на 10, а послѣдующіе на 5, и въ такомъ случаѣ произойдетъ $6 \times 10 : 2 \times 5 = 3 \times 10 : 1 \times 5$.

*Изъ* предыдущаго доказательства понять можно, что истина сія служить можетъ во всякомъ другомъ содержаніи.

100. Естьли въ двухъ или многихъ пропорціяхъ случится, что предыдущій членъ перваго содержанія одной будетъ равенъ послѣдующему другой, то можно, когда потребуетъ надобность, помножать пропорціи сіи по порядку, и опустить тѣ члены, которые будутъ общими; на примѣръ въ двухъ сихъ пропорціяхъ:

$$6 : 4 = 12 : 8$$
$$4 : 3 = 20 : 15$$

можно вывесть $6 : 3 = 12 \times 20 : 8 \times 15$.

Ибо допустивши общаго множителя 4, содержаніе $6 \times 4$ кЪ $4 \times 3$ не будетЪ ничѢмЪ различествовать отЪ содержанія 6 кЪ 3 ( Аривм. 160 ), которое происходитЪ отЪ опущенія множителя.

Равнымъ образомЪ изЪ . . $6 : 4 = 12 : 8$
$4 : 3 = 20 : 15$
$3 : 7 = 21 : 49$

ВыходитЪ $6 : 7 = 12 \times 20 \times 21 : 8 \times 15 \times 49$

Та же истина и по той же причинѢ служитЪ во вторыхЪ содержаніяхЪ.

Наблюденіе сіе полезно быть можетЪ кЪ сысканію содержанія двухЪ количествЪ, когда сіе содержаніе будетЪ сложное; ибо вЪ такомЪ случаѢ каждое изЪ тѢхЪ количествЪ сравнивается сЪ другими, которыя пріемлются какЪ бы вспомоществующія и недолжныя оставаться по доказательствѢ.

Познаніе, полученное нами вЪ числахЪ о пропорціяхЪ, приноровимЪ теперь кЪ линѢямЪ.

Содержанія, которыя приняты будутъ здѣсь, предполагаются Геометрическія. Такимъ образомъ когда скажемъ, что такая та линѣя содержится къ другой, какъ *на пр.* 5 къ 4; должно разумѣть чрезъ сіе, что первая содержитъ въ себѣ другую столько, сколько 5 содержитъ въ себѣ 4.

101. *Естьли на боку* AZ *какого нибудь угла* ZAX (фиг. 56) *назначится нѣсколько равныхъ частей* AB, BC, CD, DE, *и проч. произвольной величины; и когда по произвольномъ продолженіи изъ какой нибудь точки раздѣленія на пр. изъ* F *линѣи* FL, *которая пересѣчетъ другой бокъ* AX *въ* L, *проведутся чрезъ другія точки раздѣленія линѣи* BG, CH, DI, EK *и проч. параллельныя съ* FL; *то говорю я, что части* AG, GH, HI *и проч. бока* AX *будутъ также равны между собою.*

Опусти изъ точекъ G, H, I, и проч. линѣи GM, HN, IO и проч параллельныя къ AZ, треугольники ABG, GMH, HNI, IOK и проч. будутъ всѣ равны между собою; ибо 1е. линѣи GM HN, IO и проч. каждая равна AB, понеже (82) онѣ равны BC, CD, DE и проч. 2е. углы GMH, HNI, IOK и проч.

всѣ равны между собою, потому что каждый изъ нихъ (43) равенъ углу ABG, углы MGH, NHI, OIK и проч. также равны, потому что каждой изъ нихъ равенъ углу GAB (43).

И такъ треугольники BAG, MGH, NHI и проч. имѣя по одному боку равному, лежащему при двухъ равныхъ углахъ, будутъ всѣ равны между собою; слѣдовательно бока ихъ AG, GH, HI и проч. должны быть также всѣ равны: изъ сего заключимъ, что линѣя AX раздѣлена дѣйствительно параллельными на равныя части.

И такъ явствуетъ, что линѣя AB какая будетъ часть линѣи AG, линѣя BC будетъ такаяжъ часть линѣи GH, CD будетъ подобная часть HI; когда примѣромъ AB есть $\frac{2}{3}$ AG, BC будетъ $\frac{2}{3}$ GH и такъ далѣе.

Тоже самое служитъ въ 2, 3, 4 ипроч. частяхъ линѣи AF, сравниваемыхъ съ 2, 3, 4 и проч. частями AL; почему каждая частица AD или DF линѣи AF есть одинаковая часть съ сходственною ей AI или IL линѣи AL, какъ AB съ AG, то есть, что

$$AD : AI = AB : AG.$$

$$\text{и } DF : IL = AB : AG$$

Можно также послать $AF : AL = AB : AG.$

По чему (по причинѣ содержанія AB: AG, общаго всѣмъ тремъ пропорціямъ) можно заключить, что

AD : AI = DF : IL
и AD : AI = AF : AL

102. *Ежели изъ точки D (фиг. 57), взятой произвольно на боку AF какого нибудь треугольника AFL, проведется линѣя DI параллельно съ бокомъ FL, то два бока AF и AL пересѣкутся пропорціонально*, то есть что

AD : AI = DF : IL
и AD : AI = AF : AL,

или перемѣнивъ мѣста двухъ среднихъ членовъ (Ариѳ. 171).

AD : DF = AI : IL
и AD : AF = AI : AL

какой бы впрочемъ не былъ уголъ FAL.

Ибо представь себѣ линѣю AF раздѣленную на такое число, что D сдѣлалась бы точкою раздѣленія По томъ когда изъ всѣхъ точекъ раздѣленія проведены были бы параллельныя линѣи съ FL; то DI будетъ одна изъ тѣхъ параллельныхъ, и слѣд. истина сихъ пропорцій докажется тѣмъ же самымъ способомъ, какъ было показано (101).

103. Почему 1е. *естьли изъ точки* A, *взятой произвольно внѣ линѣи* GL (фиг. 60 и 61) *проведутся къ разнымъ точкамъ сей линѣи многія другія* AG, AH, AI, AK, AL; *то всякая линѣя* BF, *параллельная съ* GL, *пересѣчетъ всѣ сіи линѣи пропорціонально*, то есть что . . .

$$AB : BG = AC : CH = AD : DI = AE : EK = AF : FL$$

и $AB : AG = AC : AH = AD : AI = AE : AK = AF : AL$

Ибо принявъ въ разсужденіе попеременно углы GAH, GAI, GAK, GAL, такъ какъ прежде уголъ FAL въ *фиг.* 57, легко доказать можно, что всѣ содержанія сіи будутъ равны.

104. 2е. *Линѣя* AD, (фиг. 58) *раздѣляющая въ треугольникѣ уголъ* BAC *на двѣ равныя части, пересѣкаетъ противоположенной ему бокъ* BC *на двѣ части* BD и DC *пропорціонально прочимъ бокамъ* AB и AC, то есть, что

$$BD : DC = AB : AC.$$

Ибо естьли изъ точки B проведется къ линѣи AD параллельная BE, пока она съ продолженіемъ AC пересѣчется въ точкѣ E, то линѣи CE и CB будутъ въ такомъ случаѣ пересѣчены пропорціонально (102), и слѣд. $BD : CD = AE : AC$.

Но видѣть можно, что AE равна AB; ибо по причинѣ параллельныхъ AD и BE уголъ E равенъ углу DAC (37), а уголъ EBA равенъ своему алтернему BAD (38); какъ же DAC и BAD будучи половины BAC, равны между собою, то углы E и EBA будутъ также равны, а изъ сего слѣдуетъ, что и бока AE и AB равны; почему пропорція BD : CD = AE : AC перемѣнится въ BD : CD = AB : AC.

Посредствомъ предложенія сего можно опредѣлить точки продолженія капитальной линѣи въ бастіонѣ.

Взявши на продолженіяхъ BD и BE (*фиг.* 59) двухъ фасовъ произвольно двѣ точки D и E, вымѣряй BD и BE, или (когда не можно ихъ мѣрять) опредѣли длину ихъ способомъ, которой будетъ показанъ послѣ, и вымѣряй также DE; потомъ какъ капитальная линѣя дѣлитъ уголъ ABC и противоположенной ему DBE на двѣ равныя части, посылай слѣдующую пропорцію DB : BE = DF : EF; но (Ариѳ. 174) можетъ также быть DB + BE : BE = DE : EF. Такимъ образомъ получишь EF и слѣд. точку F.

105. *Естьли линѣи* AF *и* AL (фиг. 57) *пересѣкутся въ точкахъ* D *и* I *пропорціонально, то есть что* AF : AD = AL : AI, *то линѣя* DI *въ такомъ случаѣ будетъ параллельна съ* FL.

Ибо часть AI, которую отсѣкаетъ параллельная, проведенная изъ точки D, должна (102) содержаться въ AL столько,

сколько AD въ AF; но по положенію AI содержится именно столько разъ въ AL, слѣд. часть сія не иная быть можетъ какъ AI.

106. И такъ *естьли линѣи* (фиг. 60) AG, AH, AI, AK, AL, *проведенныя изъ точки* A *къ разнымъ точкамъ линѣи* GL, *пересѣкутся пропорціонально въ точкахъ* B, C, D, E, F; *линѣя* BCDEF *проходящая чрезъ всѣ сіи точки, будетъ прямая и параллельная съ* GL.

107. Доказанныя предложенія (101 и слѣд.) суть также истинны, когда линѣя BF не находится между точкою A и линѣею GL какъ въ *фиг.* 60, но упадаетъ по другую сторону точки A, какъ въ *фиг.* 61. Ибо все, что сказано о *фиг.* 56, и что служитъ основаніемъ предложенія (101 и слѣд.), можетъ служить также доказательствомъ параллельнымъ линѣямъ, пересѣкающимъ продолженія ZA и XA въ *фиг.* 56.

## *О подобіи Треугольниковъ.*

108. *Сходственными* боками въ двухъ треугольникахъ или вообще въ двухъ фигурахъ подобныхъ называются тѣ, изъ которыхъ каждой занимаетъ подобное положеніе въ своей фигурѣ.

Когда предлагается, что два подобные треугольника или двѣ подобныя фигуры имѣютъ бока пропорціональные, то разумѣется, что каждой бокъ первой фигуры содержитъ въ себѣ сходственной бокъ другой или самъ въ немъ содержится одинакое число разъ; такимъ образомъ когда въ выводимыхъ пропорціяхъ будешь сравнивать одинъ бокъ первой фигуры съ сходственнымъ ему другой — должно въ послѣдующемъ содержаніи сравнивать другой бокъ первой фигуры съ сходственнымъ ему второй; или когда сравнивалъ ты одинъ бокъ съ другимъ первой фигуры, то два бока второй, слѣдующіе къ сравненію въ другомъ содержаніи, должны быть сходственными прежнимъ и взяты въ томъ же порядкѣ, то есть чтобъ предыдущій членъ втораго содержанія былъ сходственнымъ бокомъ съ предыдущимъ членомъ перваго содержанія.

109. *Когда въ двухъ треугольникахъ найдется, что три угла одного равны порознь тремъ угламъ другаго, то сходственные ихъ бока будутъ пропорціональны, и слѣд. треугольники тѣ подобны.*

Естьли бы два треугольника ADI и AFL (*фиг.* 62) были таковы, что уголъ A перваго равенъ углу A втораго, уголъ D равенъ углу F и уголъ I равенъ углу L; то говорю, что AD : AF = AI : AL = DI : FL.

Ибо какъ уголъ A перваго треугольника равенъ углу A другаго, то оба сіи треугольника можно положить одинъ на другой показаннымъ образомъ въ *фиг.* 57; а какъ по причинѣ равенства угла D съ угломъ F, линѣи DI и FL должны быть параллельны

( 37 ), то изъ доказаннаго ( 102 ) слѣдуетъ, что AD : AF = AI : AL справедливо.

Проведемъ теперь изъ точки I (*фиг.* 57) прямую IH параллельную съ AF, то изъ сказаннаго ( 102 ) явствуетъ, что AI : AL = FH : FL, или по причинѣ равенства FH съ DI ( 32 ) = DI : FL; слѣдовательно AD : AF = AI : AL = DI : FL.

И переставивъ средніе члены, можно также послать AD : AI = AF : AL, и AI : DI = AL : FL.

110. А когда (75) два угла одного треугольника равны двумъ угламъ другаго, то третій уголъ долженъ по необходимости равенъ быть третьему; и такъ заключимъ, что *два треугольника будутъ подобны, какъ скоро въ нихъ найдется по два угла равныхъ*,

111. Видѣли мы ( 43 ), что два угла, которыхъ бока обращены къ одной сторонѣ параллельно, бываютъ равны; изъ сего слѣдуетъ, что *два треугольника, у которыхъ будутъ бока параллельны, будутъ имѣть порознь всѣ углы равные*, и (109) *бока пропорціональные*.

Почему естьли *въ двухъ треугольникахъ будетъ сдѣланъ каждой бокъ одного перпендикуляренъ каждому боку другаго, то бока сіи будутъ также пропорціональны*; ибо склонивши на четверть круга одинъ какой нибудь треугольникъ къ другому, бока ихъ сдѣлаются параллельными.

112. *Ежели изъ прямаго угла* A *прямоугольнаго треугольника* BAC (фиг. 46), *опустится на противоположенной бокъ* BC (*которой называется Гипотенузою*) *перпендикуляръ* AD; *то* 1 е. *два треугольника* ADB и ADC *будутъ подобны между собою и треугольнику* BAC. 2 е. *Перпендикуляръ* AD *будетъ средняя пропорціональная линѣя между отрѣзками гипотенузы* BD и DC. 3 е. *Каждой бокъ* AB *или* AC *прямаго угла будетъ среднимъ пропорціональнымъ между гиппотенузою и соотвѣтствующимъ отрѣзкомъ* BD или DC.

Ибо треугольники ADB и ADC имѣютъ каждой въ D по прямому углу, равно какъ треугольникъ BAC въ точкѣ A; сверьхъ сего каждой изъ нихъ имѣетъ по одному общему углу съ тѣмъ послѣднимъ треугольникомъ, понеже уголъ B принадлежитъ какъ треугольнику ADB, такъ и треугольнику BAC; равнымъ образомъ уголъ C какъ

треугольнику DAC, такъ и треугольнику BAC; почему (109) треугольники сіи подобны. И сравнивая сходственные бока въ двухъ треугольникахъ ADB и ADC, получишь

$$BD : AD = AD : DC,$$

Сравнивая сходственные бока двухъ треугольниковъ ADB и BAC, получишь

$$BD : AB = AB : BC.$$

Наконецъ сравнивая сходственные бока въ треугольникахъ ADC и BAC, получишь

$$CD : AC = AC : BC.$$

Изъ сего видѣть можно (Ариѳ. 164), что AD есть средняя пропорціональная между BD и DC; AB средняя пропорціональная между BD и BC; и напослѣдокъ AC средняя пропорціональная между CD и BC.

113. *Два треугольника, имѣющіе по одному равному углу, заключающемуся между двумя пропорціональными боками, будутъ имѣть также остальные два угла равные, и слѣдовательно будутъ подобны.*

Естьли два треугольника ADI и AFL (*фиг* 62) будутъ такіе, что уголъ A перваго равенъ углу A втораго, и бока, между которыми тѣ углы заключаются, бу-

дутъ содержаться какъ AD : AF = AI : AL; то говорю я, что они подобны, то есть что они будутъ имѣть прочіе углы порознь равные, и остальные третьи свои бока DI и FL въ той же пропорціи, какъ AD : AF или AI : AL.

Ибо положивши треугольникъ ADI на треугольникъ AFL показаннымъ образомъ въ *фигурѣ* 57, уголъ A перваго закроетъ уголъ A другаго. Но какъ AD : AF = AI : AL, то слѣдуетъ, что двѣ прямыя линѣи AF и AL пересѣчены пропорціонально въ точкахъ D и I; а изъ сего явствуетъ, что DI (105) параллельна съ FL; почему (37) уголъ AFL равенъ углу ADI и уголъ ALF равенъ AID.

Отсюду и изъ сказаннаго (109) слѣдуетъ, что DI: FL = AD : AF = AI: AL.

114. *Два треугольника, у которыхъ три сходственные бока пропорціональны, будутъ имѣть всѣ углы порознь равные, и слѣдовательно такіе треугольники подобны.*

Естьли допустится (*фиг.* 63), что DE : AB = EF : BC = DF : AC, то говорю, что уголъ D равенъ углу A, уголъ E равенъ углу B, и уголъ F равенъ углу C.

Представимъ, что на боку DE сдѣланъ треугольникъ DGE, котораго уголъ DEG равенъ углу B и уголъ GDE углу A, то треугольникъ DGE будетъ подобенъ треугольнику ABC (109), и слѣдовательно DE : AB = GE : BC = DG : AC; но по положенію DE : AB = EF : BC = DF : AC; почему по причинѣ общаго содержанія DE : AB, будетъ GE : BC = EF : BC = DG : AC = DF : AC, а отсюду можно вывесть сіи двѣ пропорціи:

GE : BC = EF : BC.
и DG : AC = DF : AC.

И такъ когда оба послѣдующіе члена въ каждой пропорціи равны между собою, то и предыдущіе должны быть также равны; почему GE равно EF и DG равно DF. Слѣд. треугольникъ DGE имѣетъ три бока равные тремъ бокамъ порознь треугольника DEF, и (83) онъ равенъ ему; но мы доказали, что треугольникъ DEG подобенъ ABC, слѣд. и DEF подобенъ также ABC.

115. Доказали выше (109) что по проведеніи линѣи DI (*фиг.* 57) параллельно съ бокомъ FL, треугольники ADI и AFL бываютъ подобны; а какъ сія истинна имѣетъ всегда мѣсто, какои бы величины не былъ уголъ A, то изъ сего должно за-

ключить (*фиг.* 60), что треугольники AGH, AHI, AIK, AKL подобны треугольникамъ ABC, ACD, ADE, AEF порознь одинъ другому, и слѣдовательно (109) KL : FE = AK : AE = KI : DE = AI : AD = IH : CD = AH : AC = GH : BC; и такъ выводя изъ равенства сихъ содержаній одни только тѣ, которыя заключаютъ части линѣй GL и BF, получишь KL : EF = KI : DE = IH : CD = GH : BC; то есть *ежели изъ какой нибудь точки* A *проведутся къ разнымъ точкамъ прямой линѣи* GL *многія другія прямыя же, то линѣи сіи пересѣкутъ всякую параллельную съ* GL *въ той же пропорціи, какъ онѣ пересѣкаютъ* GL, *то есть на такія части, которыя будутъ содержаться между собою, какъ сходственныя имъ части линѣи* GL.

116. Показанное предложеніе (101) научаетъ насъ дѣлить данную линѣю на нѣсколько равныхъ частей или на такія, которыя были бы между собою въ требуемомъ содержаніи. Положимъ, что линѣю AR (*фиг.* 56) должно раздѣлить на двѣ части, содержащіяся между собою какъ 7 : 3; проведи изъ точки A подъ произвольнымъ угломъ линѣю AZ неопредѣленной величины и взявъ раствореніе циркула AB по изволенію же, положи его десять разъ на AZ; точку Q, конецъ послѣдней части, соедини съ R линѣею RQ; потомъ естьли изъ точки D, конца третьяго раздѣленія, продолжишь DI параллельную съ QR, то линѣя AR въ точкѣ I раздѣлится на двѣ части RI и AI въ такомъ содержаніи, какъ 7 : 3; ибо (101 и 102) онѣ находятся между собою какъ DQ : AD, состоящія изъ 7 и 3 частей.

Отсюда видѣть можно, что ежели бы дано было раздѣлить линѣю AR на большее число частей, на примѣръ на 5 такихъ, которыя были бы между собою какъ числа 7, 5, 4, 3, 2; стоило бы только сложить всѣ сїи числа, которыхъ сумма равняется 21; по томъ растворивъ циркулъ произвольно, перенести раствореніе его двадцать одинъ разъ на линѣю AZ, и провесть параллельныя линѣи къ QR изъ концовъ 7го, 5, 4, 3, 2 раздѣленія.

Когда содержанїе дано будетъ въ линѣяхъ, то въ такомъ случаѣ должно класть всѣ сїи линѣи одну подлѣ другой на линѣѣ AZ.

Изъ сего же явствуетъ, какъ должно поступать при раздѣленїи линѣи AB на равныя части.

Но ежели случатся части дѣлимой линѣи весьма малыя, или самая та линѣя будетъ мала; то какъ весьма не большая и непримѣтная погрѣшность въ проведенїи параллельныхъ линѣй имѣетъ великое влїянїе на равность или неравность частей, для сего не безполезно будетъ предложить здѣсь слѣдующїй способъ.

117. fg (*Фиг.* 64) есть линѣя, которую требуется раздѣлить на 6 равныхъ частей.

Проведи линѣю BC неопредѣленной величины, и раствореніемъ циркула, произвольно взятымъ, положи на ней шесть равныхъ частей: пусть линѣя BC содержитъ въ себѣ сїи шесть частей; по линѣи BC начерти равносторонной треугольникъ BAC, и изъ верху его A опредѣли на бокахъ AB и AC части AF и AG равныя *fg*; проведи FG, которая будетъ равна *fg*; продолжи наконецъ изъ A ко всѣмъ точкамъ раздѣленїя BC прямыя линѣи, которыя пересѣкутъ FG въ такомъ же содержанїи, въ какомъ пересѣчена BC.

Ибо когда линѣи AF съ AG и AB съ AC равны, то будетъ AB : AF = AC : AG; почему AB и AC пересѣчены пропорцїонально въ точкахъ F и G; а по сему FG параллельна съ BC и (113) треугольникъ

FAG подобенъ ABC; и такъ треугольникъ FAG равносторонной; FG равна AF и слѣд. линѣи *fg*; а какъ FG параллельна съ BC, то обѣ сіи линѣи (115) должны пересѣчься пропорціонально линѣями, проведенными изъ точки A къ прямой BC.

Предложенное можетъ научить, какъ должно дѣлать и раздѣлять маштабъ, которой служитъ къ превращенію большой *фигуры* въ малую; маштабъ въ большемъ употребленіи находится *десятерной*, и вотъ какимъ образомъ составляется. На концахъ A и B линѣи AB (*фиг.* 65), которую требуется раздѣлить на 100 частей, поставь перпендикуляры AC, BD, на каждомъ изъ нихъ опредѣли десять равныхъ частей произвольной величины; проведши CD положи на AB и CD по десяти равныхъ частей, по томъ продолжи на кось поперечныя линѣи, какъ видѣть можно въ *фигурѣ сей* и проч. наконецъ чрезъ точки раздѣленія, соотвѣтствующія линѣямъ CA и BD, проведи прямыя параллельныя линѣи съ AB, отъ чего AB раздѣлится на 100 желаемыхъ частей. Ежели угодно взять на пр. 47 такихъ частей, которыхъ AB содержитъ 100; для сего возми на линѣѣ проходящей чрезъ число 7, часть 7H, заключающуюся между CA и поперечною линѣью, которая продолжена къ числу 40, поступая такимъ же образомъ для всякаго другаго числа.

Въ самой вещи по причинѣ подобія треугольниковъ C7*v*, CA*x*, явствуетъ, что 7*v* содержитъ въ себѣ 7 частей такихъ, какихъ A*x* заключаетъ въ себѣ 10; но какъ *v*H содержитъ въ себѣ 4 разстоянія равныя A*x*, почему цѣлая линѣя 7H равна 47 такимъ частямъ, какихъ A*x* имѣетъ въ себѣ 10, или 47 такихъ, какихъ AB содержитъ 100.

118. По доказанному (102) предложенію можно *сыскать къ тремъ даннымъ линѣямъ* ab, cd, ef, *четвертую пропорціональную* (фиг. 57), то есть такую линѣю, которая бы составляла четвертый членъ въ Геометрической пропорціи, у которой будутъ тремя первыми *ab*, *cd*, *ef*.

Для сего продолживши двѣ неопредѣленной величины прямыя линѣи AF и AL подъ произвольнымъ угломъ, перенеси *ab* изъ точки A въ D, линѣю *cd* изъ A въ F, и равнымъ образомъ *ef* изъ A въ I; потомъ соединивъ точки D и I прямою линѣею DI, проведи изъ точки F линѣю FL параллельную съ DI, которая опредѣлитъ AL желаемую четвертую пропорціональную линѣю.

Можно также по силѣ доказаннаго (109) предложенія поступать въ семъ случаѣ такимъ образомъ. Возми на линѣѣ AF неопредѣленной величины (*фиг.* 57) двѣ части AD, AF равныя *ab*, *cd*; и продолживши подъ какимъ угодно угломъ линѣю DI равную *ef*, проведи изъ точки A чрезъ I прямую AIL, которую пересѣки въ L линѣю FL параллельною съ DI; сія параллельная будетъ четвертый искомый членъ.

Когда два средніе члена въ пропорціи равны, то четвертый въ такомъ случаѣ называется *третій пропорціональный членъ*, потому что въ сей пропорціи находится только три различные члена. Такимъ образомъ, когда потребуется сыскать къ двумъ даннымъ линѣямъ третью пропорціональную, чрезъ сіе разумѣть должно, что требуется найти четвертый членъ пропорціи, въ которой вторая изъ данныхъ линѣй занимаетъ мѣсто двухъ среднихъ; почему дѣйствіе остается тоже, какое мы теперь только показали.

Теорія о пропорціональныхъ линѣяхъ и подобіи треугольниковъ служитъ основаніемъ многоразличныхъ дѣйствій въ Геометрической практикѣ. Но мы намѣрены здѣсь показать главнѣйшія, и на первой разъ будемъ говорить о тѣхъ только, которыя безъ измѣренія угловъ произведены быть могутъ, то есть съ помощію однихъ кольевъ и веревокъ. О прочихъ же изъяснимъ въ Тригонометріи, когда дѣло будетъ итти о инструментахъ, служащихъ къ измѣренію угловъ.

1е. Положимъ, что надобно было бы навести мостъ на рѣку, и требовалосьбы узнать ширину AB сей рѣки (*фиг.* 66).

въ прямомъ положенiи съ AB, на разстоянiи BC, которое бы по крайней мѣрѣ равно было на глазомѣръ $\frac{1}{3}$ ширины AB, поставь колъ C, и вымѣряй BC. Съ правой или лѣвой стороны BC и въ произвольномъ положенiи вымѣряй также какое нибудь разстоянiе CE (лучше ежели оно будетъ длиннѣе). Назначь на CE средину D, и опредѣливъ точку F, которая была бы въ прямомъ положенiи какъ съ BE такъ и AD, вымѣряй BF и FE. По томъ опредѣли AB сею пропорцiею FE — BF : $\frac{1}{2}$ BC = BF : AB.

Ибо ежели изъ средины D проведется DG параллельная съ AB, то точка G, гдѣ она пересѣчется съ BE будетъ (102) середина BE, и слѣд. FG будетъ равна FE — BF. Но подобные треугольники FGD и ABF по причинѣ параллельныхъ линѣй, выводятъ пропорцiю FG : GD = BF : AB. Сверхъ же сего ради подобiя треугольниковъ EDG и ECB линѣя DG равна $\frac{1}{2}$ BC, понеже ED есть $\frac{1}{2}$ EC, почему FG или FE — BE : $\frac{1}{2}$ BC = BF : AB.

2е. Можно также при измѣренiи разстоянiй употребить и слѣдующее средство: пусть будетъ надобно вымѣрять разстоянiе отъ точки B траншеи (*фиг.* 67), взятой на капитали равелина, до верху угла A покрытаго пути.

Сдѣлай BC перпендикулярно къ AB произвольной величины. Поставь колъ въ точкѣ E линѣи BC, такъ чтобъ CE была равна BE или была нѣкоторая ея часть, на пр. половинная, третья и проч. по томъ протяни линѣю CD перпендикулярно отъ BC до тѣхъ поръ, пока конецъ ея D будетъ находиться въ прямомъ положенiи съ точками E и A. Въ такомъ случаѣ AB будетъ равна CD, естьли BE сдѣлана равна EC; и AB будетъ вдвое или втрое больше CD, ежели CE сдѣлана равна половинѣ или трети BE. Справедливость сего явствуетъ изъ подобiя треугольниковъ ABE и ECD, потому что CD съ AB параллельны.

3е. Для измѣренiя неприступнаго разстоянiя AB (*фиг.* 68).

Выбери точку C такую, откуда бы можно было видѣть два предмета A и B, и поставь тутъ колъ. По томъ показанными способами, или другими подобными имъ опредѣли длину линѣй CA и BC; наконецъ отъ C на продолженїяхъ сихъ линѣй поставь колья въ D и E, такъ чтобъ CD : CE = CA : CB, (что удобно сдѣлать можно, понеже CA и CB извѣстны и часть CD можно взять произвольно), и вымѣряй DE; тогда получишь AB по сей пропорцїи CD : DE = CA : AB, основанной на подобїи двухъ треугольниковъ CAB и CDE, которые между пропорцїональными боками заключаютъ равный или общїй уголъ (113).

4е. Ежели нужда потребуетъ провести на землѣ изъ данной точки C (*фиг.* 70) параллельную линѣю къ другой неприступной AB (въ случаѣ когда кромѣ кольевъ не будетъ ни какихъ другихъ орудїй), то выбравъ произвольно точку D, возьми на AD другую точку E, которая была бы въ прямой линѣѣ съ B и C. Изъ сей точки E проведи параллельную EG къ линѣи DB, которая положимъ будетъ приступна; по томъ чрезъ C продолжи параллельно съ AD линѣю GCF, которая пересѣчетъ BD въ F, на EG назначь точку H, которая бы находилась въ прямомъ положенїи съ AF; такимъ образомъ линѣя KCHI, продолженная чрезъ точки H и C, будетъ требуемая параллельная.

Ибо по причинѣ параллельныхъ FG и AD, треугольники FHG и FAD подобны, и дѣлаютъ FG или ED : GH = AD : FD. По той же причинѣ треугольники ECG и BED дѣлаютъ EG или FD : GC = BD : DE. А какъ обѣ сїи пропорцїи имѣютъ одинакїе крайнїе члены, то произведенїе среднихъ равно будетъ въ той и другой, слѣд. (Ариѳ. 170) можно вывести изъ сихъ четырехъ количествъ слѣдующую пропорцїю GC : GH = AD : BD; и такъ два треугольника GCH и ABD имѣютъ по одному равному углу, заключающемуся между пропорцїональными боками; ибо по причинѣ четвероугольника GEDF, у котораго противоположенныя стороны равны, уголъ G равенъ углу D. Почему уголъ GCH или его противоположенный KCF равенъ углу BAD; и такъ

когда CF сдѣлана параллельна съ AD, CK должна необходимо быть параллельна съ AB.

5 е. По даннымъ Эполементу батареи (*фиг.* 69), наружному отверстію HK и внутреннему AB амбразуры, которую нужно вынуть, требуется опредѣлить направленіе сторонъ HA и KB.

Вообразивъ точку P, въ которой продолженныя стороны должны пересѣчься, посылай въ подобныхъ треугольникахъ HKP и ABP, HK : AB = HP : AP. Ежели же чрезъ середину G и C представишь умственно линѣю выстрѣла GCP, то въ подобныхъ треугольникахъ HGP и ACP получишь HP : AP = GP : CP, и слѣд. (Ариѳ. 174) HK — AB : AB = GC : CP; такимъ образомъ CP будетъ извѣстна, то есть то количество, которое должно отойти отъ середины отверстія C перпендикулярно къ AB, дабы опредѣлить точку P, которая съ A и B находится въ такомъ положеніи, какое должны имѣть стороны AH, BK.

6 е. Тѣмъ же почти способомъ по подобію треугольниковъ можно опредѣлить точку C (*фиг.* 71), гдѣ линѣя цѣли должна встрѣтиться съ продолженною осью пушки.

Ядро по тяжести своей лѣтитъ изъ пушки въ томъ направленіи, въ какомъ пущено, такъ что ежели бы линѣя цѣли была параллельна съ осью орудія, то ядро попадало бы всегда ниже цѣли. Для избѣжанія сего промаху, линѣи цѣли дается такое наклоненіе, что она встрѣчается съ осью въ растояніи AC меньшемъ противъ того, на которомъ бы ядро могло соединиться съ продолженною линѣею цѣли. А чтобъ сыскать сію точку C, то стоитъ только узнать длину AB пушечной оси, заключающуюся между двумя точками цѣли G и H и высоту GA и HB сихъ двухъ точекъ отъ оси. Тогда въ подобныхъ треугольникахъ GAC и HBC получишь сію пропорцію GA : HB = AC : BC, а изъ сей (Ариѳ. 174) выведи другую GA — HB : HB = AB : BC, въ которой все кромѣ BC извѣстно.

## *О пропорціональныхъ Линѣяхъ, относящихся къ Кругу.*

119. Двѣ линѣи называются пересѣченными въ *возвратномъ* или *взаимномъ* содержаніи тогда, когда къ составленію пропорціи изъ частей сихъ линѣй, двѣ части одной служатъ крайними членами, а двѣ части другой средними.

Двѣ линѣи *взаимно пропорціональныя* къ своимъ частямъ называются тѣ, изъ которыхъ одна составляетъ съ своею частію крайніе члены, а другія съ своею частію средніе члены пропорціи.

120. *Двѣ хорды* AC *и* BD (фиг. 72), *пересѣкающіяся въ кругѣ подъ какимъ нибудь угломъ и во всякой точкѣ* E, *пересѣкаются всегда во взаимномъ содержаніи, то есть что* AE : BE = DE : CE.

Ибо по проведеніи хордъ AB и CD происходятъ два подобные между собою треугольника BEA, CED; понеже сверхъ угла BEA равнаго CED (20), уголъ ABE или ABD равенъ углу DCE или DCA, потому что имѣютъ верхи свои при окружности и стоятъ на одной дугѣ AD (64). И такъ тре-

угольники BEA и CED подобны (109) и сходственные бока ихѣ будутѣ пропорціональны, то есть AE : BE = DE : CE, гдѣ видѣть можно, что части хорды AC суть крайніе, а части хорды BD средніе члены пропорціи.

121. Какѣ доказанное предложеніе имѣетѣ мѣсто всегда, какѣ бы не была расположена точка E, и подѣ какимѣ бы угломѣ непересѣкались двѣ хорды AC и BD, слѣд. оно имѣетѣ мѣсто и тогда, когда двѣ хорды (*фиг.* 73) будутѣ перпендикулярны одна кѣ другой, и когда одна изѣ нихѣ AC напримѣрѣ проходитѣ чрезѣ центрѣ; но какѣ вѣ семѣ случаѣ хорда BD пересѣкается на двѣ равныя части (52), то два средніе члена пропорціи AE : BE = DE : CE бываютѣ равны, и пропорція можетѣ перемѣниться вѣ сію другую AE : BE = BE : CE; почему *всякой перпендикулярѣ* BE, *опущенный изѣ какой нибудь точки* B *окружности на поперешникѣ, есть средняя пропорціональная линѣя между двумя отрѣзками* AE *и* CE *того діаметра.*

122. Предложеніе сіе имѣетѣ многія полезныя употребленія; но мы на сей разѣ покажемѣ одно только, и именно какѣ *найти между данными двумя линѣями* ae *и* ec *среднюю пропорціональную* (фиг. 74).

Проведши прямую неопредѣленной величины линѣю AC, положи на ней части AE, EC равныя линѣямъ *ae*, *ec* и описавъ на всей AC, какъ на поперешникѣ, полкруга ABC, воставь изъ точки соединенія E перпендикуляръ EB къ AC; сей перпендикуляръ будетъ желаемая средняя пропорціональная линѣя.

123. *Два секанса* AB *и* AC (фиг. 75), *проведенные къ одной точкѣ* A *внѣ круга, бываютъ всегда взаимно пропорціональны къ наружнымъ своимъ частямъ* AD *и* AE, *въ какомъ бы мѣстѣ не находилась точка* A, *и какой бы тѣ секансы не дѣлали между собою уголъ.*

Проведши хорды GD и BE, получишь два треугольника ADC, AEB, въ которыхъ 1 е. уголъ A обоимъ общій: 2 е уголъ B равенъ углу C, потому что какъ тотъ, такъ и другой имѣютъ верхъ при окружности, и заключаютъ между боками своими одну дугу DE (64); почему треугольники сіи (109) подобны, и бока ихъ будутъ пропорціональны AB : AC = AE : AD; откуда явствуетъ, что секансъ AB съ наружною своею частію AD составляетъ крайніе члены, а секансъ AC съ своею наружною частію AE средніе.

124. Понеже пропорція сія справедлива, какой бы уголъ BAC не былъ; то ежели вообразимъ себѣ, что бокъ AB остается на

своемъ мѣстѣ, а бокъ AC обращаясь около точки A, будетъ удаляться отъ AB, въ такомъ случаѣ двѣ точки сѣченія E и C будутъ безпрестанно сближаться одна съ другою такъ, что наконецъ прямая AC упавши на тангенсъ AF, сольетъ обѣ сіи точки въ одну, и AC, AE сдѣлаются каждая равна AF; отъ чего пропорція AB : AC = AE : AD перемѣнится въ слѣдующую другую AB : AF = AF : AD; почему *естьли изъ точки A, взятой внѣ круга, проведутся секансъ AC и тангенсъ AF, то тангенсъ будетъ средняя пропорціональная между секансомъ AC и наружною его частію AE.*

125. Предложеніе сіе можетъ между прочими употребленіями служить *къ раздѣленію линѣи по наружной посредственной пропорціи.* Раздѣлить линѣю AB (*фиг.* 76.) по наружной посредственной пропорціи значитъ пересѣчь ее на двѣ части AC и BC такія, изъ которыхъ бы одна BC была средняя пропорціональная между цѣлою AB и другою частію AC, то есть чтобъ

AC : BC = BC : AB

Вотъ какъ сіе дѣлается. На какомъ нибудь концѣ на пр. A линѣи AB поставь перпендикуляръ AD равный половинѣ AB; изъ точки D какъ изъ центра радіусомъ AD опиши окружность, которая пересѣчетъ въ E линѣю BD, соединяющую двѣ точки B и D. Наконецъ перенеси BE изъ B въ C, отъ чего линѣя AB раздѣлится по наружной посредственной пропорціи въ точкѣ C.

Понеже линѣя AB будучи перпендикулярна къ AD есть тангенсъ (49); а какъ BF есть секансъ, то (124) BF : AB = AB : BE или BC. Также (Ариѳ. 175) BF − AB : AB − BC = AB : BC, но AB

равна FE, потому что она вдвое больше AD, почему BF — AB равна BE или BC; а какъ AB — BC равняется AC, то будетъ содержаться BC : AC = AB : BC или (Арие. 171) AC : AB = BC : AB.

## *О подобныхъ Фигурахъ.*

126. Двѣ фигуры одного числа боковъ называются *подобными* тогда, когда у нихъ сходственные углы равны и сходственные бока пропорціональны.

Двѣ фигуры ABCDE, *abcde* (*фиг.* 77) подобны, естьли уголъ A равенъ углу *a*, уголъ B равенъ углу *b*, уголъ C равенъ углу *c* и такъ далѣе; и когда бокъ AB содержитъ бокъ *ab* столько разъ, сколько BC содержитъ *cb*, сколько CD содержитъ *cd* и проч.

Оба сіи допущенія должны непремѣнно находиться вмѣстѣ во всякой фигурѣ, больше трехъ боковъ имѣющей. Но въ треугольникахъ одно изъ нихъ влечетъ за собою по необходимости и другое (109 и 114).

127. *Естьли въ двухъ подобныхъ многоугольникахъ изъ сходственныхъ угловъ* A *и a проведутся діагонали* AC, AD, ac, ad, *къ прочимъ угламъ, то оба тѣ многоугольники раздѣлятся на равное число треугольниковъ, изъ которыхъ каждой подобенъ будетъ каждому.*

Ибо уголъ B равенъ (по положенію) углу *b* и бокъ AB : *ab* = BC : *bc*, почему треугольники ABC и *abc* имѣя по углу равному, заключающемуся между пропорціональными боками, будутъ (113) подобны; слѣд. уголъ BAC равенъ углу *bac* и AC : *ac* = BC : *bc*.

Когдажъ отъ равныхъ угловъ BCD, *bcd* отнять равные BCA, *bca*, то и остальные углы ACD, *acd* будутъ равны между собою. Но какъ BC : *bc* = CD : *cd*; почему, понеже доказали что BC : *bc* = AC : *ac*, и CD будетъ содержаться DC = AC : *ac*; слѣд. треугольники ACD, *acd* будутъ также подобны, потому что находится у нихъ по одному равному углу между пропорціональми боками. Тоже самое и тѣмъ же образомъ докажется въ треугольникахъ ADE, *ade* и во всѣхъ другихъ послѣдующихъ, естьли многоугольники будутъ состоятъ изъ большаго числа боковъ.

128. *Естьли два многоугольника* ABCDE, abcde *будутъ состоятъ изъ одного числа треугольниковъ, порознь между собою подобныхъ и одинаково расположенныхъ, то такіе многоугольники подобны.*

Ибо когда треугольники подобны, то углы B и E равны угламъ *b* и *e*, и по той же причинѣ частные углы BCA, ACD, CDA, ADE равны частнымъ угламъ *bca*, *acd*, *cda*, *ade*; почему и цѣлые углы BCD, CDE равны цѣлымъ *bcd*, *cde* каждой порознь каждому. Сверхъ сего подобіе треугольниковъ выводитъ слѣдующія равныя содержанія AB : *ab* = BC : *bc* = AC : *ac* = CD : *cd* = AD : *ad* = DE : *de* = AE : *ae*, чего для извлекши изъ сихъ содержаній одни только тѣ, которыя заключаютъ бока двухъ многоугольниковъ, получишь AB : *ab* = BC : *bc* = CD : *cd* = DE : *de* = AE : *ae*. И такъ многоугольники сіи имѣя при равныхъ углахъ сходственные бока пропорціональные, будутъ подобны.

И такъ, чтобъ сдѣлать фигуру подобную данной другой ABCDE (*фиг* 77), когда будетъ дана линѣя за сходственной бокъ AB; должно положить сію линѣю на AB изъ A въ *f*, провести съ BC параллельную *fg*, которая съ AC пересѣчется въ *g*; отъ точки *g* продолжить параллельную съ CD линѣю, пересѣкающую BD въ *h*; наконецъ изъ точки *h* провести параллельную съ ED, отъ чего произойдетъ многоугольникъ *afghi* подобной ABCDE

129. *Окруженія двухъ подобныхъ фигуръ содержатся между собою, какъ сходственные бока ихъ; то есть что сумма боковъ фигуры* ABCDE *содержится къ суммѣ боковъ фигуры* a b c d e *такъ, какъ бокъ* AB *къ боку* ab.

Ибо въ равныхъ содержаніяхъ AB : $ab$ = BC : $bc$ = CD : $cd$ = DE : $de$ = AE : $ae$ сумма предыдущихъ (Ариѳ. 175) содержится къ суммѣ послѣдующихъ, какъ предыдущій къ своему послѣдующему AB : $ab$; но ясно видѣть можно, что сіи суммы суть окружности тѣхъ фигуръ.

130. Ежели по раздѣленіи окружности круга ABCDEFGH (*фиг.* 78) на произвольное число равныхъ частей, и по проведеніи изъ центра I къ точкамъ раздѣленія радіусовъ IA, IB и проч. опишется другимъ полупоперешникомъ I$a$ окружность $abcdefgh$, пересѣкающая тѣ радіусы въ $a$, $b$, $c$, $d$ и проч. то удобно можно видѣть, что, когда въ обѣихъ окружностяхъ соединятся точки раздѣленія хордами, произойдутъ два многоугольника подобные. Ибо треугольники ABI, $abi$ и проч. подобны, потому что у нихъ въ I будетъ по равному углу, заключенному между пропорціональными боками; понеже когда IA равна IB, I$a$ равна I$b$, то AI : BI = $a$I : $b$I; тоже самое докажется и въ прочихъ треугольникахъ. Изъ сего и изъ сказаннаго (129) слѣдуетъ, что окруженіе многоугольника ABCDEFGH : $abcdefgh$ = AB : $ab$, или (для подобія треугольниковъ ABI, $ab$I) = AI : $a$I. Но какъ подобіе сіе не за-

висить отъ числа боковъ сихъ многоугольниковъ, то оно будетъ имѣть мѣсто и тогда, когда число боковъ каждаго увеличится до безконечности; а въ такомъ случаѣ допустить можно, что окружность круга съ окруженіемъ такого, вписаннаго въ немъ многоугольника, не будетъ имѣть почти никакой разности, слѣд. и самыя окружности круговъ ABCDEFGH и *abcdefgh* будутъ содержаться между собою = AI : *a*I, то есть какъ ихъ радіусы, или какъ ихъ діаметры.

131. И такъ заключимъ изъ сего, что 1 е. *окружность круга можно принимать за правильной многоугольникъ, изъ безчисленнаго множества боковъ состоящій.*

2 е. *Круги суть фигуры подобныя.*

3 е. *Окружности круговъ содержатся между собою, какъ полупоперешники ихъ или поперешники.*

132. И вообще, ежели въ двухъ подобныхъ многоугольникахъ проведутся линѣи равно наклоненныя въ разсужденіи сходственныхъ ихъ боковъ, и будутъ оканчиваться въ точкахъ, одинаково къ тѣмъ же бокамъ расположенныхъ; то сіи линѣи, называемыя *сходственными*, будутъ между собою въ

одинакомЪ содержанiи съ двумя сходственными какими нибудь боками многоугольниковЪ. Ибо какЪ скоро онѣ дѣлаютЪ углы равные сЪ двумя сходственными боками, то онѣ сдѣлаютЪ также углы равные и сЪ прочими двумя боками, понеже углы обоихЪ подобныхЪ многоугольниковЪ равны каждой порознь каждому; но ежели вЪ случаѣ онѣ не были бы вЪ одинакомЪ содержанiи сЪ двумя сходственными боками, то удобно понять можно, что точки, вЪ которыхЪ онѣ оканчиваются, не такЪ расположены, какЪ мы допускаемЪ.

---

## ОТДѢЛЕНIЕ ВТОРОЕ.

### *О Поверхностяхъ.*

133. Мы приступаемЪ разсматривать теперь свойства втораго изЪ трехЪ родовЪ объявленнаго пространства, то есть пространства вЪ длину и ширину.

Мы будемЪ разсуждать вЪ семЪ отдѣленiи о *поверхностяхъ плоскихъ*, занимаясь изЪясненiемЪ однихЪ фигурЪ, ограниченныхЪ прямыми линѣями, и о кругѣ.

Мѣра поверхностей состоитЪ вЪ мѣрѣ треугольныхЪ или четверобочныхЪ фигурЪ.

Четверобочныхъ фигуръ находится три рода, *Четвероугольникъ* просто называемый, *Трапеція* и *Параллелограммъ*.

Четвероугольникъ есть фигура, въ которой нѣтъ ни одного бока параллельнаго съ другимъ, ему противоположеннымъ (*фиг.* 83).

Трапеція есть четвероугольникъ, въ которомъ два бока только параллельны (*фиг.* 84).

Параллелограммъ есть четвероугольникъ, въ которомъ противоположенные бока параллельны (*фиг.* 79, 80, 81, 82, 88, 89), и раздѣляется на четыре рода на *ромбоидъ*, *ромбъ*, *прямоугольникъ* и *квадратъ*.

*Ромбоидъ* есть параллелограммъ, въ которомъ смѣжные бока и углы не равны (*фиг.* 79).

*Ромбъ* есть четвероугольникъ, у котораго бока равны, но углы не равны (*фиг.* 80).

*Прямоугольникъ* есть тотъ, у котораго всѣ углы равны, но смѣжные бока не равны (*фиг.* 81).

*Квадратъ* есть четвероугольникъ, у котораго всѣ бока и всѣ углы равны (*фиг.* 82).

Когда въ четвероугольникѣ углы равны, то они необходимо должны быть прямые;

потому что четыре угла всякаго четвероугольника, взятые вмѣстѣ, равняются четыремъ прямымъ угламъ (86).

Перпендикулярная линѣя EF (*фиг.* 79), проведенная между двумя противоположенными боками параллелограмма, называется *высотою* его; а бокъ BC, на которой она падаетъ, *основанiемъ*.

*Высота* треугольника ABC (*фиг.* 85, 86 и 87) есть перпендикуляръ AD, опущенной изъ угла A на противоположенной бокъ BC, иногда продолженной, естьли нужда того требуетъ; а бокъ BC въ такомъ случаѣ называется *основанiемъ*.

134. *Прямолинѣйной треугольникъ, какой бы впрочемъ не былъ* ABC (фиг. 87), *равенъ половинѣ параллелограмма, имѣющаго съ нимъ одинакое основанiе и одинакую высоту.*

Ибо по проведенiи изъ верху угла C линѣи CE параллельной съ бокомъ BA, а изъ верху угла A линѣи AE параллельной съ BC; линѣи сiи CE и AE съ боками AB и BC составятъ параллелограммъ ABCE, имѣющiй одно основанiе и одну высоту съ треугольникомъ ABC; но видѣть можно, что треугольники ABC и CEA равны, потому что бокъ AC обоимъ общiй; сверхъ того углы

ВАС и АСЕ также ВСА и САЕ равны между собою по причинѣ параллельныхъ ( 38 ); почему оба тѣ треугольники, имѣя по одному боку равному, лежащему при двухъ равныхъ углахъ, суть равны между собою; а изъ сего слѣдуетъ, что треугольникъ АВС есть половина параллелограмма АВСЕ.

135. *Параллелограммы* ABCD, EBCF ( фиг. 88 и 89 ), *имѣющіе одинакое основаніе и одинакую высоту, равны въ поверхностяхъ или площадяхъ своихъ.*

Оба параллелограммы ABCD, EBCF ( *фиг.* 88 ) имѣютъ общую часть EBCD; по чему равенство ихъ зависитъ отъ равенства треугольниковъ АВЕ, DCF; но сіе не трудно доказать, ибо АВ равна CD, также ВЕ равна CF, потому что сіи параллельныя линѣи заключаются между параллельнымижъ ( 82 ); сверхъ сего уголъ АВЕ ( 43 ) равенъ DCF; почему треугольники сіи, имѣя по углу равному, заключающемуся между двумя равными боками, равны между собою, и параллелограммы ABCD и EBCF будутъ по этому также равны.

Въ *фигурѣ* 89 доказано будетъ такимъ же образомъ, что два треугольника АВЕ и DCF равны; а отнявъ отъ каждаго треугольникъ DIE, оставшіяся двѣ трапеціи ABID и EICF

будутъ равны; наконецъ придавъ къ каждой изъ сихъ трапецій треугольникъ BIC, параллелограммъ ABCD и параллелограммъ EBCF, которые изъ того произойдутъ, будутъ равны.

136. Изъ доказаннаго можно заключить также, что *треугольники, имѣющіе одинакое основаніе и одинакую высоту, равны въ площадяхъ своихъ*. Понеже они суть половины параллелограммовъ одного съ ними основанія и одной высоты (134).

137. А изъ сего послѣдняго предложенія слѣдуетъ, что *всякой многоугольникъ можетъ превращенъ быть въ треугольникъ равной съ нимъ поверхности*. На примѣръ пусть будетъ данъ пятіугольникъ ABCDE (*фиг.* 90); естьли проведутся во первыхъ діогональ EC, соединяющая концы двухъ смѣжныхъ боковъ ED, DC, во вторыхъ DF параллельная съ EC до точки F, гдѣ она пересѣчется съ продолженіемъ бока AE, напослѣдокъ CF; то изъ того произойдетъ четвероугольникъ ABCF равный въ площади пятіугольнику ABCDE; ибо два треугольника ECD, ECF имѣютъ общимъ основаніемъ EC, и сверхъ того заключаясь между параллельными EC, DF будутъ одинакой высоты; почему они будутъ равны; а когда приба-

вится къ каждому четвероугольникъ EABC, то произойдетъ изъ того пятіугольникъ ABCDE, равный четвероугольнику ABCF.

Но такимъ же образомъ, какъ превратили мы пятіугольникъ въ четвероугольникъ, четвероугольникъ можетъ превратиться въ треугольникъ, и такъ и проч.

## *О измѣреніи Поверхностей.*

138. *Мѣрять поверхность* значитъ опредѣлять, сколько такая-то поверхность содержитъ въ себѣ другую извѣстную.

Мѣры обыкновенно употребляемыя суть квадраты, а иногда также прямоугольные продолговатые четвероугольники; почему вымѣрять поверхность ABCD (*фиг.* 91) есть тоже, что опредѣлить, сколько она содержитъ въ себѣ квадратовъ такихъ какъ *abcd*, или прямоугольниковъ на пр. *abcd*; естьли бокъ *ab* квадрата *abcd* былъ бы равенъ футу, то значитъ опредѣлить, сколько въ поверхности ABCD будетъ находиться квадратныхъ футовъ; когда же бокъ *ab* прямоугольника *abcd* былъ бы одного фута, а бокъ *bc* трехъ футовъ, въ такомъ случаѣ опредѣляемъ, сколько поверхность ABCD заключаетъ въ себѣ прямоугольниковъ длиною 3 хъ, а шириною одного фута.

Дабы вымѣрять въ квадратныхъ частяхъ поверхность прямоугольника ABCD, надлежитъ сыскать, сколько разъ бокъ AB содержитъ въ себѣ бокъ *ab* квадрата *abcd*, долженствующаго служить единицею или мѣрою; также сыскать, сколько бокъ BC содержитъ *ab*: и по томъ помноживъ сіи два числа одно на другое, произведеніе почитать за число квадратовъ такихъ, какъ *abcd*, которое помѣстится на поверхности ABCD.

На примѣръ ежели AB содержитъ въ себѣ *ab* четыре раза, и BC содержитъ *ab* семь разъ; то помножь 7 на 4, произведеніе 28 означитъ, что прямоугольникъ ABCD вмѣщаетъ въ себѣ 28 квадратовъ *abcd*.

Ибо ежели изъ точекъ раздѣленія E, F, G проведутся параллельныя линѣи съ BC, то произойдетъ изъ того четыре равныхъ прямоугольниковъ, изъ которыхъ каждой содержать въ себѣ долженъ столько квадратовъ *abcd*, сколько находится частей равныхъ *ab* въ боку BC; почему, когда возмешь квадраты, содержащіеся въ одномъ изъ тѣхъ прямоугольниковъ столько разъ, сколько находится прямоугольниковъ, то есть столько разъ, сколько бокъ AB содержитъ въ себѣ *ab*; а какъ число квадратовъ, находящихся въ каждомъ прямоугольникѣ, есть одинакое съ

числомъ частей ВС, то явствуетъ изъ сего, что умноживъ число частей ВС на число частей равныхъ АВ, получишь число квадратовъ такихъ какъ *abcd*, помѣщающихся въ прямоугольникѣ ABCD.

Хотя мы предположили въ разсужденіи своемъ, что бока АВ и ВС заключаютъ въ себѣ ровное число мѣръ *ab*; однакожъ не меньше будетъ справедливо оно и тогда, когда мѣра *ab* не будетъ въ нихъ содержаться ровно.

На примѣръ ежели бокъ ВС заключалъ бы въ себѣ 6 мѣръ съ $\frac{1}{2}$, то каждой прямоугольникъ въ такомъ случаѣ содержать будетъ въ себѣ 6 квадратовъ съ $\frac{1}{2}$; а когда бокъ АВ заключалъ бы 3 мѣры съ $\frac{1}{3}$, то не больше будетъ 3 съ $\frac{1}{3}$ такихъ прямоугольниковъ, изъ которыхъ каждой помѣститъ въ себѣ по 6 квадратовъ съ $\frac{1}{2}$; почему должно умножить 6 $\frac{1}{2}$ на 3 $\frac{1}{3}$, то есть число мѣръ ВС на число мѣръ АВ.

Когда же на мѣсто исчисленія поверхности ABCD (*фиг.* 91) въ частяхъ квадратныхъ, требовалось бы узнать ее въ частяхъ прямоугольника *abcd*; то разсужденіе наше показываетъ, что должно вымѣрять АВ въ частяхъ равныхъ *ab*, а ВС въ частяхъ равныхъ *bc*, и умножить число частей перваго измѣренія на число частей втораго.

На примѣръ ежели бы предложено было въ четверобочной прямоугольной дачѣ длиною 400, а шириною 300 саженъ, вычислить, сколько будетъ находиться десятинъ; то знавши мѣру десятины, (которая обыкновенно бываетъ 80 саженъ длиннику и 30 поперешнику) видѣть можно, что длинникъ десятины 80 въ длинѣ дачи 400 содержится 5 разъ, а поперешникъ 30 въ ширинѣ 300 содержится 10 разъ; почему должно 5 помножить на 10, произведенïе 50 покажетъ искомое число десятинъ.

Впрочемъ при измѣренiи поверхности въ частяхъ прямоугольника, можно производить дѣйствiе иначе такъ: вымѣрять ее сперва въ частяхъ квадратныхъ, а по томъ раздѣлить число тѣхъ частей на число квадратныхъ мѣръ, содержащихся въ прямоугольникѣ.

139. Какъ (135) прямоугольной параллелограммъ ABCD (*фиг.* 88 и 89) равенъ всякому параллелограмму косому или наклоненному EBCF, имѣющему съ нимъ одинакое основанiе и одинакую высоту; то слѣдуетъ, что для сысканiя площади послѣдняго, надлежитъ умножить число частей основанiя его BC, на число частей высоты BA; почему можно вообще сказать, что *для сысканiя числа квадратныхъ мѣръ, содержащихся въ какомъ нибудь параллелограммѣ* ABCD (фиг. 79), *должно, вымѣрявъ основанiе его* BC *и высоту* EF *одинакою мѣрою, умножить число мѣръ основанiя на число мѣръ высоты.*

И такъ изъ сказаннаго (138) явствуетъ, что при исчисленіи площади ABCD (*фиг.* 91), которое состоитъ въ томъ только, чтобъ брать поверхность GBCH или число квадратовъ въ ней содержащихся столько разъ, сколько бокъ GB содержится въ бокѣ AB; множимое число бываетъ дѣйствительно поверхность, а множитель число отвлеченное, показывающее, сколько разъ должно брать множимое.

Однакожъ весьма обыкновенно говорится, что *для сысканія площади параллелограмма, должно помножить основаніе его на высоту*; сіе выраженіе должно почитать за сокращенное, въ которомъ подразумѣвается число частей квадратныхъ, помѣщающихся въ основаніи, на число частей высоты. Словомъ не льзя никакъ сказать, что линѣя помножается линѣею. Помножать значитъ брать извѣстное число разъ; такимъ образомъ помножая линѣю, получишь линѣю же, а помножая поверхность, не иное можно получить, какъ поверхность. Поверхность непремѣнно должна состоять изъ поверхностей, хотя и часто говорится, что параллелограммъ ABCD (*фиг.* 79) можетъ принятъ быть за площадь, состоящую изъ такого числа равныхъ и параллельныхъ линѣй съ BC, сколько находится въ высотѣ EF точекъ; однакожъ въ семъ случаѣ подразумѣвается, что сіи линѣи имѣютъ ширину хотя безконечно малую (ибо какое бы множество не было линѣй, но онѣ безъ ширины не могутъ составить никакой поверхности); а по допущеніи сего каждая изъ тѣхъ линѣй есть сама по себѣ поверхность, которая будучи взята столько разъ, сколько высота ея содержится въ высотѣ EF, производитъ поверхность ABCD.

Со всѣмъ тѣмъ мы примемъ и сами сіе выраженіе, *помножать линѣю на линѣю*, однакожъ не

будемъ терять изъ виду, что это дѣлается единственно для сокращенія. Итакъ мы будемъ говорить, что произведеніе двухъ линѣй дѣлаетъ поверхность, хотя бы въ самой вещи должно сказать, число частей одной линѣи, помноженное на число частей другой, производитъ число квадратныхъ частей, содержащихся въ параллелограммѣ, у котораго одна изъ тѣхъ линѣй будетъ высотою, а другая основаніемъ.

Для означенія поверхности параллелограмма ABCD (*фиг* 79) мы будемъ писать $BC \times EF$; въ *фигурѣ* 81 мы напишемъ $AB \times BC$; а въ *фигурѣ* 82, которой оба бока AB и BC равны, на мѣсто $AB \times BC$ или $AB \times AB$ изобразимъ $\overline{AB}^2$; такимъ образомъ $\overline{AB}^2$ будетъ значить линѣю AB, помноженную на самую себя, или поверхность квадрата, сдѣланнаго на линѣѣ AB; также для означенія линѣи AB возвышенной въ кубическую степень, мы будемъ писать $\overline{AB}^3$, и сіе тоже самое будетъ представлять, какъ $AB \times AB \times AB$ или $\overline{AB}^2 \times AB$.

140. Изъ предложеннаго слѣдуетъ, что, какъ скоро два параллелограмма равны въ площадяхъ, произведеніе одного, произшедшее изъ основанія его, помноженнаго на высоту, будетъ всегда равно произведенію другаго изъ основанія, помноженнаго на высоту.

*И такъ, когда два параллелограмма равны въ площадяхъ, основанія ихъ будутъ взаимно пропорціональны высотамъ*; то есть, что основаніе и высота перваго могутъ приняты быть за крайніе члены пропорціи, а основаніе и высота другаго за средніе; ибо по расположеніи ихъ такимъ образомъ, произведеніе крайнихъ будетъ рав-

но произведенію среднихъ ; а по сему пропорція не обходимо должна быть (*Арие*. 170).

Въ прочемъ изъ сей истины непосредственно заключить должно, что, когда основаніе перваго будетъ на примѣръ меньше основанія втораго, высота перваго должна непремѣнно по пропорціи быть больше для того, чтобъ вышло одинакое произведеніе.

141. Какъ треугольникъ составляетъ половину параллелограмма одинакаго съ нимъ основанія и одинакой высоты (134), то слѣдуетъ изъ сказаннаго (139), что *для сысканія площади треугольника надобно помножить основаніе его на высоту, и взять половину изъ произведенія.*

И такъ, когда высота AD (*Фиг.* 85 и 86) будетъ 34 футовъ, основаніе BC равно 52, то площадь сего треугольника будетъ заключать въ себѣ 884 квадратныхъ футовъ, то есть половину произведенія 52 на 34.

Безполезно, думаю я, было бы доказывать, что произведеніе останется тоже самое, когда въ треугольникѣ основаніе помножится на половину высоты, или высота на половину основанія.

*И для превращенія треугольника въ квадратъ одинакой съ нимъ площади;* вопросъ рѣшится (122), или (Арие. 168),

когда за бокъ квадрата принята будетъ средняя пропорціональная линѣя между основаніемъ и половинною высотою треугольника; понеже квадратъ сей средней пропорціональной линѣи долженъ равняться (Ариѳ. 168.) произведенію двухъ тѣхъ линѣй.

*Заключимъ изъ сего, что можно превратить всякую фигуру въ квадратъ одинакой съ нею поверхности.*

142. И такъ 1е. *чтобъ найти площадь трапеціи*; должно сложить два параллельные ея бока, изъ суммы взять половину и умножить на перпендикуляръ, проведенный между параллельными боками трапеціи. Ибо естьли проведешь діогональ BD (*фиг.* 84), то получишь два треугольника ABD, BDC, у коихъ EF будетъ общею высотою. Почему для площади треугольника ABD должно помножить половину AD на EF; а для треугольника BDC половину BC на ту же EF; изъ сего явствуетъ, что площадь трапеціи равна половинѣ AD помноженной на EF съ половиною BC помноженной на EF, то есть половинѣ суммы AD и BC, помноженной на EF.

Когда чрезъ середину G линѣи AB проведется GH параллельная къ BC, то линѣя

GH будетъ представлять половину суммы двухъ линѣй AD и BC. Пусть будетъ I точка, гдѣ GH пересѣчетъ діогональ BD, подобные треугольники BAD, BGI по причинѣ параллельныхъ AD и GI показываютъ, что (109) GI есть половина AD, потому что BG равна половинѣ AB. Но какъ GH параллельна съ BC и AD, то DC (102) пересѣчена въ той же пропорціи, какъ AB; такимъ же образомъ докажется, что IH равна половинѣ BC чрезъ сравненіе подобныхъ треугольниковъ BDC и IDH.

И такъ по силѣ сказаннаго теперь можно утвердить, что *площадь трапеціи* ABCD *равна произведенію высоты ея* EF *на линѣю* GH, *проведенную въ равномъ разстояніи отъ обоихъ противоположенныхъ параллельныхъ боковъ.*

143. 2е. Дабы *найти площадь всякаго многоугольника*; должно раздѣлить его на треугольники линѣями, проведенными изъ одной и той же точки ко всѣмъ его угламъ, и вычислить порознь площадь каждаго изъ треугодьниковъ; по томъ сложивъ всѣ произведенія, сумму почитать за площадь многоугольника. Чтобъ имѣть меньше въ многоугольникѣ треугольниковъ, то должно проводить всегда линѣи изъ какого нибудь его угла; *смотри фиг.* 53.

144. *Естьли многоугольникъ будетъ правильной* (фиг. 78); то какъ всѣ бока въ немъ равны, и всѣ перпендикуляры проведенные изъ центра также равны, слѣд. представивъ его составленнымъ изъ треугольниковъ, имѣющихъ верхи свои при центрѣ, получишь площадь его, когда помножишь одинъ изъ боковъ его на половину перпендикуляра, и потомъ произведеніе сіе умножишь опять на число боковъ; или тоже самое произойдетъ, когда сумму боковъ умножишь на половину перпендикуляра.

145. Понеже кругъ можно (131) принять за правильной многоугольникъ изъ безчисленнаго множества боковъ состоящій, то должно заключить, что *для сысканія площади круга, надлежитъ помножить окружность на половину полупоперешника.*

Ибо перпендикуляръ опущенный на какой нибудь бокъ многоугольника, не имѣетъ разницы съ радіусомъ, когда безчисленное множество будетъ находиться въ немъ боковъ.

146. Понеже окружности круговъ содержатся между собою, какъ поперешники ихъ или полупоперешники (131); то явствуетъ, что ежели бы извѣстна была окружность круга извѣстнаго поперешника, можно было бы тотчасъ опредѣлить окружность всякаго другаго круга, котораго данъ былъ бы поперешникъ;

потому что стоило бы только сыскать четвертой пропорціональной членъ въ сей посылкѣ: *какъ діаметръ извѣстной окружности къ той же самой окружности, такъ діаметръ искомой окружности содержится къ сей послѣдней окружности.*

Хотя не найдено точное содержаніе поперешника къ окружности; однакожъ находятся довольно близкія, такъ что практика не имѣетъ нужды въ точнѣйшихъ.

Архимедъ нашелъ, что кругъ, имѣющій въ поперешникѣ 7 футовъ, будетъ въ окружности своей содержать почти 22 фута. Такимъ образомъ когда потребуется узнать величину окружности круга, коего поперешникъ 20 футовъ, надлежитъ искать (Ариѳ. 169) четвертой членъ пропорціи, въ которой тремя первыми суть:

7 : 22 = 20:

Сей четвертой членъ будетъ почти $62\frac{6}{7}$, длина окружности круга 20 футовъ въ діаметрѣ. Почти $62\frac{6}{7}$ говорю я, ибо не меньше кругъ долженъ имѣть 800 футовъ въ поперешникѣ, чтобъ въ окружности его не доставало одного фута. Сверхъ сего употребляя содержаніе 7:22 можно не дѣлать пропорціи; ибо утроивъ поперешникъ и приложивъ къ произведенію седьмую часть того же самаго поперешника, получишь также окружность, потому что $3\frac{1}{7}$ есть число разъ, сколько 22 содержитъ въ себѣ 7.

Адріанъ Мецій изобрѣлъ содержаніе вѣрнѣе перваго, то есть 113:355. Сіе содержаніе таково, что развѣ тогда только въ окружности учинится погрѣшность на одинъ футъ, когда діаметръ круга будетъ состоять изъ 3000000 футовъ (*) Наконецъ ежели понадобится окружность

(*) Дабы удобнѣе припомнить содержаніе сіе, то надлежитъ замѣтить, что числа его составляющія произойдутъ, когда по написаніи трехъ первыхъ нечетныхъ цыфръ, каждой два раза сряду на пр. 113355, раздѣлишь ихъ по томъ по поламъ.

съ большею точностію, то стоитъ только употребить слѣдующее содержаніе 1 къ 3, 141592653589793, которое многимъ превосходитъ границы нуждъ, какія въ практикѣ могутъ случиться, и въ которомъ глядя по обстоятельствамъ можно убавлять больше или меньше цыфръ отъ правой руки. А какъ сіе содержаніе имѣетъ первымъ членомъ единицу, то дѣйствіе весьма способно производится умноженіемъ числа 3,1415926 на діаметръ круга, котораго требуется найти окружность.

Итакъ не трудно теперь найти площадь даннаго круга, по крайней мѣрѣ съ такою исправностію, которая достаточно удовлетворить можетъ во всякомъ случаѣ нуждамъ практики.

Естьли потребуется узнать, сколько будетъ квадратныхъ футовъ въ площади круга, котораго діаметръ 20 футовъ; сыщи какъ было предъ симъ показано окружность, она равняется $62\frac{6}{7}$ футамъ; помножь $62\frac{6}{7}$ на половину радіуса 5 (145), и произведеніе $314\frac{2}{7}$ квадратныхъ футовъ будетъ площадь даннаго круга.

147. *Секторъ* или *вырѣзокъ круга* называется такая поверхность (*фиг.* 78), которая заключается между двумя радіусами IA, IB и дугою AVB. А *Сегментъ* или *отрѣзокъ* есть площадь, содержащаяся между дугою AVB и хордою AB.

Понеже кругъ можно принять за правильной многоугольникъ, изъ безчисленнаго множества боковъ состоящій; то слѣдуетъ, что секторъ круга можно принять за часть правильнаго многоугольника, а поверхность

его за площадь, состоящую изъ безчисленнаго множества треугольниковъ, имѣющихъ верхи свои при центрѣ, а высотою радіусъ. И такъ, чтобъ *найти площадь сектора*, должно умножить дугу, служащую ему основаніемъ, на половину радіуса.

148. Въ разсужденіи же сегмента явствуетъ, что для сысканія площади его, надлежитъ вычесть площадь треугольника IAB изъ площади сектора IAVB.

149. Почему видѣть можно, что въ кругѣ длины дугъ суть пропорціональны своему числу градусовъ; и слѣд. когда извѣстна будетъ длина окружности, легко найдется длина дуги предложеннаго числа градусовъ по слѣдующей пропорціи: *какъ 360 градусовъ къ числу градусовъ искомой дуги, такъ длина окружности будетъ содержаться къ длинѣ той самой дуги.*

150. Естьли надобность потребуетъ найти площадь сектора, у котораго извѣстны число градусовъ и радіусъ; то сыщи по показанной пропорціи длину дуги, которая служитъ основаніемъ тому сектору, и умножь ее на половину радіуса. Пусть будетъ дано узнать площадь сектора 32 градусовъ 40 минутъ въ кругѣ, котораго діаметръ равенъ 20 футамъ; окружность (146) найдется $62\frac{6}{7}$ футовъ, по томъ сыщи четвертой членъ въ пропорціи, которой тремя первыми будутъ $360^{\circ} : 32^{\circ}, 40' = 62\frac{6}{7}$: сей

четвертый найденный членъ $5\frac{19}{27}$ будетъ длина дуги $32^{\circ}, 40'$; помножь $5\frac{19}{27}$ на половину радїуса 5, произведенїе $28\frac{14}{27}$ будетъ равно площади искомаго сектора $32^{\circ} 40'$.

## *О измѣренїи Поверхностей Саженями.*

151. Чрезъ измѣренїе поверхностей саженями разумѣется способъ, состоящїй въ умноженїяхъ, которыя бываютъ нужны для исчисленїя площадей разныхъ фигуръ, когда протяженїя ихъ опредѣляются саженями или частями сажени.

Поверхности исчисляются квадратными саженями и частями квадратной сажени.

Квадратная сажень заключаетъ въ себѣ 49 квадратныхъ футовъ, потому что она представляется прямоугольникомъ, имѣющимъ по 7 футовъ въ длину и ширину. Квадратной футъ содержитъ 144 крадратныхъ дюймовъ, квадратной дюймъ 100 квадратныхъ линѣй и проч.

И такъ при исчисленїи площадей въ квадратныхъ саженяхъ и частяхъ квадратной сажени, надлежитъ вопервыхъ привести оба протяженїя, слѣдующїя къ умноженїю, въ самой малѣйшїй сортъ (въ линѣи на примѣръ, ежели малѣйшїй сортъ данъ будетъ въ линѣяхъ); по томъ сдѣлавъ умно-

женіе, приводить обратно въ квадратные дюймы, въ квадратные футы и наконецъ въ квадратныя сажени чрезъ попеременное деленіе на 100, 144 и 49.

На примеръ, чтобъ сыскать площадь прямоугольника, длиною $3^{с}$ $4^{ф}$ $8^{д}$, шириною $1^{с}$ $2^{ф}$ $5^{д}$; делаю какъ следуетъ:

$3^{с}$ $4^{ф}$ $8^{д}$ составляютъ . . . . $308^{д}$
1 2 5 . . . . . . . . . . 113

924
308
308

Произведеніе представляетъ 34804 квадратные дюймы

Делю на 144, и получаю . . 34804 | 144
600 | 241 квадр. футы.
244
100

Делю 241 на 49 . . . . 241 | 49
45 | 4 квадрат. сажени.

Такимъ образомъ площадь прямоугольника состоитъ изъ $4^{сс}$ $45^{фф}$ $100^{дд}$.

152. Понеже въ Фортификаціи при чертеже плановъ и строеніи крепостей употребляется Французская мера, и какъ примеры, находящіеся въ сей Геометріи и Тригонометріи, взяты по большой части изъ той науки: то мы также за нужное почитаемъ, сделавъ сравненіе Французской меры съ Россійскою, показать какъ производится исчисленіе площадей въ квадратныхъ тоазахъ и квадратныхъ частяхъ

квадратнаго тоаза. Видѣли мы ( Ариѳ. 185 въ примѣрѣ II ), что Аглицкой футъ къ Французскому содержится какъ 15 къ 16 ; а какъ Россійская сажень содержитъ въ себѣ 7 Аглицкихъ футовъ, слѣд. по посылкѣ

16 : 15 = 7 :

Найдемъ, что Россійская сажень должна состоять изъ $6\frac{9}{16}$ Французскихъ футовъ, и потому надобно 105 такихъ футовъ, чтобъ составить полныя 16 саженъ; слѣд. сажень къ тоазу будетъ содержаться какъ 105 къ 96, или = 35 : 32 ; а квадратная сажень къ квадратному тоазу = 1225 : 1024.

Измѣреніе площадей въ квадратныхъ тоазахъ и частяхъ квадратнаго тоаза есть двоякое. Первое точно такое же, какое мы теперь только показали, считая квадратными тоазами, квадратными футами, квадратными дюймами и проч.

Квадратной тоазъ содержитъ 36 квадратныхъ футовъ, квадратной футъ 144 квадратныхъ дюймовъ, квадратной дюймъ 144 квадратныхъ линѣй и такъ далѣе.

На примѣръ въ прямоугольникѣ, длиною 2т 3ф 5д, шириною 0т 4ф 6д, найду площадь, поступая какъ выше:

2 т 3 ф 5 д составляютъ . . 185 д
0 4 6 . . . . . . . . . 54

740
925

Произведенiе . . . 9990 квадрат. дюймы.

Дѣлю на 144 и получаю . . 9990 | 144
1350 | 69 квад. футы.
54 |

Дѣлю 69 на 36 и получаю . 69 | 36
33 | 1 квадрат. тоазъ.

Почему площадь состоитъ изъ 1 ТТ 33 ФФ 54 дд.

Во второмъ способѣ исчисленiя площадей въ квадратныхъ тоазахъ и частяхъ квадратнаго тоаза, представляется квадратной тоазъ состоящимъ изъ шести прямоугольниковъ, изъ которыхъ каждой имѣетъ высотою одинъ тоазъ, а въ основанiи одинъ футъ, и называется потому *тоазъ-футъ*; тоазъ-футъ раздѣляется на 12 частей или прямоугольниковъ, имѣющихъ высотою тоазъ а основанiемъ дюймъ: сiи прямоугольники называются *тоазы-дюймы*; тоазъ-дюймъ раздѣляется опять на другiя 12 частей или прямоугольниковъ, которые содержутъ въ высотѣ тоазъ, а въ основанiи линѣю, и называются *тоазы-линѣи*. Словомъ тоазъ представляется дѣлющимся безпрестанно на прямоугольники, которые вообще имѣютъ всѣ тоазъ высотою, а футъ или дюймъ, или линѣю, или скру-

пулъ основаніемъ. Раздѣленія сіи, простирающіяся далѣе скрупуловъ, означаются на подобіе минутъ, секундъ, терцій и проч съ тою только отмѣною, что здѣсь знаки сіи предшествуемы бываютъ Т.

И такъ при исчисленіи площадей надлежитъ, умножая части двухъ линѣй, принимать тоазы множимаго за квадратные тоазы, футы за тоазы-футы, дюймы за тоазы-дюймы и такъ далѣе; чтожъ касается до множителя, то его должно представлять всегда за такое число, сколько разъ должно взять множимое.

Изъ сего замѣчанія явствуетъ, что при рѣшеніи должно поступать по показаннымъ въ Ариѳметикѣ привиламъ, въ оглавленіи *о умноженіи разнородныхъ чиселъ.*

## ПРИМѢРЪ.

Требуется сыскать площадь прямоугольника длиною 52 Т 4 ф 5 д, а шириною 44 Т 4 ф 8 д.

Принимаю 52 Т 4 ф 5 д за 52 ТТ 4 Тф 5 Тд, а множителя за число отвлеченное, и произвожу дѣйствіе какъ слѣдуетъ.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 52 ТТ | 4 Тф | 5 Тд | | |
| | 44 Т | 4 ф | 8 д | | |
| | 208 ТТ | 0 Тф | 0 Тд | 0 Тл | 0 Тс |
| | 208 | | | | |
| За 3 Тф . . . | 22 | | | | |
| За 1 Тф . . . | 7 | 2 | | | |
| За 4 Тд . . . | 2 | 2 | 8 | | |
| За 1 Тд . . . | 0 | 3 | 8 | | |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| За 3 ф . . . | 26 | 2 | 2 | 6 | |
| За 1 ф . . . | 8 | 4 | 8 | 10 | |
| За 4 д . . . | 2 | 5 | 6 | 11 | 4 |
| За 4 д . . . | 2 | 5 | 6 | 11 | 4 |
| | 2361 ТТ | 2 Тф | 5 Тд | 2 Тл | 8 Тс |

153. По исчисленіи такимъ образомъ площади въ квадратныхъ тоазахъ, тоазахъ-футахъ, тоазахъ-дюймахъ и проч. не трудно также узнать величину ея и въ квадратныхъ тоазахъ, квадратныхъ футахъ, квадратныхъ дюймахъ и проч. Стоитъ только для сего подъ частями тоаза, начиная съ тоазовъ-футовъ, подписать попеременно числа 6 и $\frac{1}{2}$, какъ явствуетъ ниже; помножить каждую часть на число подъ ней стоящее, и поставить произведеніе двухъ рядомъ находящихся чиселъ 6 и $\frac{1}{2}$ въ одинъ столпецъ; когда помножая на половину, случится въ остаткѣ 1, то на мѣсто его должно написать 72 подъ множителемъ $\frac{1}{2}$, и приступить къ другому столпцу.

И такъ, дабы привести части найденнаго выше произведенія въ квадратные тоазы, квадратные футы, квадратные дюймы и проч. пишу.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 2361 ТТ | 2 Тф | 5 Тд | 2 Тл | 8 Тс |
| | 6 | $\frac{1}{2}$ | 6 | $\frac{1}{2}$ |
| 2361 ТТ | 12 ФФ | 72 ДД | | |
| | 2 | 12 | | |
| | | 4 | | |
| 2361 ТТ | 14 ФФ | 88 ДД | | |

И умножаю шоазы-фушы на 6, пошому что въ шоазѣ-фушѣ (понеже онъ имѣешъ основанїемъ фушъ, а высошою шоазъ) заключаешся 6 квадрашныхъ фушовъ. Умножаю шоазы-дюймы на $\frac{1}{2}$, и подношу 2 цѣлое, произшедшее отъ сего умноженїя, подъ квадрашные фушы, пошому что шоазъ-дюймъ равняясь 12шой части шоаза-фуша, долженъ составлять 12шую часть 6 квадрашныхъ фушовъ, шо есть половину квадрашнаго фуша; почему 5 шоазовъ дюймовъ составляютъ $2\frac{1}{2}$ квадрашныхъ фушовъ; а какъ $\frac{1}{2}$ квадрашнаго фуша равна 72 квадрашнымъ дюймамъ, шо на мѣсто половины пишу 72; напослѣдокъ для приведенїя шоазовъ-линѣй, умножаю ихъ на 6, пошому что шоазъ-линѣя равняясь 12шой части шоаза-дюйма, должна составлять 12шую часть 72 квадрашныхъ дюймовъ, шо есть 6 квадрашныхъ дюймовъ; подобнымъ образомъ докажешся, что должно умножать и послѣдующїя части на $\frac{1}{2}$ по шомъ на 6 и проч. какъ мы уже объявили.

154. И обрашно, ежели пожелаешь привесть квадрашныя части квадрашнаго шоаза въ шоазы-фушы, въ шоазы-дюймы и проч. поступай шакъ.

1 е. Возми 6шую часть изъ квадрашныхъ фушовъ, частное покажетъ шоазы-фушы; 2 е. удвой остатокъ, ежели онъ случишся, и прибавь единицу, когда число квадрашныхъ дюймовъ равно или превосходитъ 72, чрезъ что получишь шоазы-дюймы; 3 е. вычши 72 изъ числа квадрашныхъ дюймовъ, когда оно превосходитъ 72 и раздѣли остатокъ на 6, въ частномъ получишь шоазы-линѣи; 4 е. удвой опять остатокъ, ежели

онѣ случится послѣ сего послѣдняго дѣленія, и прибавь единицу, когда число квадратныхѣ линѣй превосходитѣ 72, чрезѣ что получишь число тоазовѣ - скрупуловѣ. Послѣ сего не трудно понять, какѣ должно продолжать дѣйствіе, чтобѣ получить послѣдующія части, ежели только оныя будутѣ находиться.

Такимѣ образомѣ когда предложено было бы привести $52^{ТТ}$ $25^{ФФ}$ $87^{дд}$ $92^{лл}$ вѣ тоазы - футы, вѣ тоазы - дюймы и проч. стану дѣлить 25 на 6, и получу вѣ частномѣ $4^{Тф}$, а вѣ остаткѣ 1; удвою сей 1, и кѣ произведенію прибавлю единицу, по тому что число квадратныхѣ дюймовѣ превосходитѣ 72, отѣ чего выдетѣ $3^{Тд}$. Вычту 72 изѣ 87, и раздѣлю остатокѣ 15 на 6; вѣ частномѣ получу $2^{Тл}$, а вѣ остаткѣ 3. Удвою сей остатокѣ, и приложу кѣ произведенію единицу, потому что число квадратныхѣ линѣй превосходитѣ 72, получу $7^{Тс}$; вычту 72 изѣ 92, и раздѣлю остатокѣ 20 на 6; вѣ частномѣ получу $3^{Т'}$, вѣ остаткѣ 2; удвою сей остатокѣ, и получу $4^{Т''}$, такѣ что всего выдетѣ $52^{ТТ}$ $4^{Тф}$ $3^{Тд}$ $2^{Тл}$ $7^{Тс}$ $3^{Т'}$ $4^{Т''}$.

155. Поелику чтобѣ сыскать площадь параллелограмма, надлежитѣ умножить число частей основанія его на число частей высоты; то слѣдуетѣ (Ариѳ. 67), что знавши площадь и число частей высоты или основанія, когда пожелаешь найти основаніе или высоту, надлежитѣ раздѣлить число изображающее площадь, на число изображающее какое нибудь изѣ двухѣ извѣстныхѣ протяженій. Совсѣмѣ тѣмѣ должно твердо

помнить, что площадь и въ семъ случаѣ не дѣлится на линѣю, потому что дѣленіе площади на линѣю также не сообразно, какъ и умноженіе линѣи на линѣю. Въ самой же вещи площадь дѣлится на площадь.

Ибо по объявленному (139) при исчисленіи площади прямоугольника ABCD (*фиг.* 91) мы не иное что дѣлаемъ, какъ повторяемъ площадь прямоугольника ED имѣющаго равное съ тѣмъ основаніе, а высотою единицу или начальную мѣру AE, повторяемъ говорю я, площадь сего прямоугольника столько разъ, сколько высота его AE содержится въ высотѣ AB; почему желая узнать число частей AB, или число единицъ AE, содержащихся въ той высотѣ, надлежитъ сыскать сколько разъ поверхность ABCD содержитъ площадь прямоугольника ED. Пусть на примѣръ площадь ABCD изображена была бы 361 TT 2 Тф 5 Тд 2 Тл 8 Тс, а основаніе AD 4 T 3 ф 6 д; то дабы узнать высоту AB, надлежитъ представить себѣ, что 361 TT 2 Тф и проч. слѣдуетъ дѣлить не на 4 T 3 ф 6 д, но на 4 TT 3 Тф 6 Тд; а какъ въ семъ случаѣ тоазъ есть общій производитель какъ дѣлимаго, такъ и дѣлителя, того ради частное должно произойти такое же, какъ бы дѣлитель и дѣлимое означали тоазы и части тоаза линѣйными. И такъ вопросъ рѣшится раздѣленіемъ 361 TT 2 Тф и проч. на 4 T 3 ф и проч. почитая какъ дѣлимое, такъ и дѣлителя за линѣйные тоазы, и слѣд. за числа одного рода; а какъ по свойству вопроса частное должно быть такогожъ рода, то есть изображать тоазы и части тоаза линѣйными, почему дѣленіе совершится по тѣмъ точно правиламъ, которыя были предписаны. (Ариѳ. 120 и 122).

Естьли площадь дана будетъ въ квадратныхъ тоазахъ и квадратныхъ частяхъ квадратнаго тоаза, то для большой удобности и простѣйшаго значенія должно привести тѣ части въ тоазы-футы, тоазы-дюймы и проч. по показанному (154) спосо-

бу, послѣ чего производишь дѣйствїе какъ въ предъидущемъ примѣрѣ. На примѣръ, когдабы спрашивалось сыскать высоту параллелограмма или прямоугольника, котораго основанїе дано 2 $^{Т}$ 5 $^{Ф}$, а площадь 120 $^{ТТ}$ 29 $^{ФФ}$ 54 $^{ДД}$; то по приведенїи (154) сей площади въ 120 $^{ТТ}$ 4 $^{ТФ}$ 10 $^{ТД}$ 9 $^{ТЛ}$, вопросъ рѣшится, когда 120 $^{ТТ}$ 4 $^{ТФ}$ 10 $^{ТД}$ 9 $^{ТЛ}$ раздѣлишь на 2 $^{Т}$ 5 $^{Ф}$; отъ чего по изъясненному правилу (Ариѳ 120 и 122) выдетъ въ частномъ 42 $^{Т}$ 3 $^{Ф}$ 10 $^{Д}$ 1 $^{Л}\frac{13}{17}$.

Сей второй способъ, употребляемый Французами для исчисленія площадей, можно бы приноровить къ Россійской мѣрѣ; но какъ со всякою новостїю должно поступать осторожно, то и предоставляется на волю каждаго, а особливо учащаго.

Когда же площадь и основанїе или высота будутъ даны въ саженяхъ, и потребуется сыскать высоту или основанїе, въ такомъ случаѣ надлежитъ привести квадратную мѣру площади въ малѣйшій сортъ квадратной мѣры, на примѣръ въ квадратные дюймы, квадратныя линѣи и проч. глядя потому, какъ производство рѣшенія того требуетъ, и мѣру основанія или высоты въ такой же сортъ линѣйной мѣры; потомъ раздѣлить приведенную такимъ образомъ квадратную мѣру площади на линѣйную основанія или высоты, частное покажетъ линѣйную мѣру высоты или основанія.

На примѣръ положимъ, что площадь прямоугольника дана 4сс 45фф 100дд, а длина его 3с 4ф 8д; нахожу высоту такъ:

| | | |
|---|---|---|
| 4сс, 45фф 100дд | . . . . . . . | 34804 дд |
| 3с 4ф 8д, | . . . . . . . | 308 д |

$$34804 \,|\, \underline{308} \quad 113\,д$$

Почему высотою прямоугольника сего будетъ 113 д, или по приведенiи 1с 2ф 5д.

## *О сравненiи Поверхностей.*

156. *Площади параллелограммовъ содержатся между собою вообще, какъ произведенiе основанiй ихъ на высоты.*

То есть, что площадь одного параллелограмма содержитъ въ себѣ площадь другаго параллелограмма столько разъ, сколько произведенiе основанiя перваго на высоту его содержитъ произведенiе основанiя втораго на высоту его.

Истина сего явствуетъ, что всякой параллелограммъ равенъ произведенiю основанiя своего на высоту.

Изъ сего легко заключить можно, что *два параллелограмма одной высоты находятся между собою, какъ ихъ основанiя; а тѣ которые будутъ имѣть одинакое основанiе, находятся между собою, какъ ихъ высоты.* Ибо содержанiе

произведеній не перемѣняется по уничтоженіи въ каждомъ общаго множителя. (*Ариѳ.* 160).

157. По изъясненному (145) площадь круга равна площади такого треугольника, которой будетъ имѣть основаніемъ окружность его, а высотою полупоперешникъ; и слѣд. равна площади такого прямоугольника, у котораго будетъ онованіемъ половина окружности, а высотою тотъ же полупоперешникъ. И такъ, когда сравнится сей прямоугольникъ съ квадратомъ полупоперешника, которой съ нимъ есть одной высоты; то слѣдуетъ по необходимости (156), что *квадратъ полупоперешника къ площади круга содержится такъ, какъ тотъ же полупоперешникъ къ половинѣ окружности.* Такимъ образомъ, чтобъ получить площадь круга, должно помножить квадратъ полупоперешника на содержаніе половины окружности къ радіусу, или цѣлой окружности къ діаметру.

Почему въ данномъ (146) примѣрѣ, умножаю 100, квадратъ радіуса 10 ти на $\frac{22}{7}$, и произведеніе $\frac{2200}{7}$ или $314\frac{2}{7}$ квадратныхъ футовъ, дѣлаетъ площадь круга 20 футовъ въ діаметрѣ.

158. Понеже треугольники суть (134) половины параллелограммовъ одной съ ними высоты и одного основанія, то должно за-

ключить также, что *треугольники одинакой высоты находятся между собою, какъ ихъ основанія; тѣже, у которыхъ будетъ одинакое основаніе, содержатся какъ ихъ высоты.*

159. *Площади подобныхъ параллелограммовъ или треугольниковъ содержатся, какъ квадраты сходственныхъ боковъ ихъ.*

Ибо площади двухъ параллелограммовъ ABCD и $abcd$ (*фиг.* 92) находятся между собою (156) какъ произведенія основаній ихъ на высоты, то есть, ABCD: $abcd$ = BC× AE: $bc\times ae$. Но какъ параллелограммы ABCD и $abcd$ подобны, то и треугольники AEB и $aeb$ будутъ подобны, потому что сверхъ прямаго угла при E и $e$, они имѣютъ уголъ B равной углу $b$; слѣд. (109) будетъ AE: $ae$ = AB : $ab$. При томъ для подобія параллелограммовъ,

$BC : bc = AB : ab$.

И помноживъ обѣ сіи пропорціи (*Ариѳ* 180) получишь $BC\times AE : bc\times ae = \overline{AB}^2 : \overline{ab}^2$; почему $ABCD : abcd = \overline{AB}^2 : \overline{ab}^2$.

160. Что касается до подобныхъ треугольниковъ, то нѣтъ никакого сомнѣнія,

чтобъ они не имѣли того же самаго свойства, потому что они суть половины параллелограммовъ одинакаго съ ними основанія и одинакой высоты.

161. *Вообще площади двухъ всякихъ подобныхъ фигуръ содержатся между собою, какъ квадраты сходственныхъ ихъ боковъ или линѣй.*

Ибо поверхности двухъ подобныхъ фигуръ можно принимать всегда за площади, состоящія изъ одного числа подобныхъ между собою треугольниковъ; и такъ площадь каждаго треугольника первой фигуры, будетъ къ площади сооотвѣтствующаго ему треугольника во второй фигурѣ, какъ квадратъ какого нибудь бока перваго треугольника къ квадрату соотвѣтствующаго ему бока во второмъ треугольникѣ (160); а какъ всѣ сходственные бока двухъ подобныхъ фигуръ находятся въ одинакомъ содержаніи и квадраты ихъ должны быть также въ равномъ содержаніи, то явствуетъ (Арие. 181), что каждый треугольникъ перваго многоугольника будетъ къ треугольнику, соотвѣтствующему ему во второмъ многоугольникѣ, какъ квадратъ какого нибудь бока перваго многоугольника къ квадрату сходственнаго бока другаго; на-

послѣдокъ ( Арие. 176 ) и сумма всѣхъ треугольниковъ перваго многоугольника, къ суммѣ всѣхъ треугольниковъ втораго, или площадь перваго къ площади втораго будетъ находиться въ одинакомъ содержаніи.

162. *Площади круговъ содержатся между собою, какъ квадраты полупоперешниковъ ихъ или цѣлыхъ поперешниковъ.*

Ибо круги суть фигуры подобныя (131), а полупоперешники ихъ и поперешники линѣи сходственныя.

Должно заключить тоже самое о секторахъ и сегментахъ одного числа градусовъ.

Изъ сего видѣть можно, что площади подобныхъ фигуръ не имѣютъ одинакаго содержанія съ ихъ окруженіями; ибо окруженія находятся въ простомъ содержаніи боковъ (129), то есть, когда въ двухъ подобныхъ фигурахъ, бокъ одной будетъ вдвое, втрое, вчетверо и *проч.* больше сходственнаго ему бока другой, то и окруженіе первой будетъ вдвое, втрое, вчетверо и *проч.* больше окруженія послѣдней; но въ поверхностяхъ происходитъ совсѣмъ другое содержаніе, потому что площадь первой

фитуры будетЪ уже вЪ 4, 9, 16 разЪ больше площади другой.

163. Естьли бы понадобилось сдѣлать фигуру, подобную другой, и которой площадь находилась кЪ площади первой вЪ данномЪ содержанiи, на примѣрЪ какЪ 2 : 3; то не должно дѣлать сходственныхЪ ея боковЪ вЪ содержанiи 2 : 3, потому что вЪ такомЪ случаѣ площади ихЪ будутЪ между собою какЪ 4 : 9; но должно сдѣлать бока ея такой величины, чтобЪ квадраты ихЪ были между собою какЪ 2 : 3; то есть положивЪ, что бокЪ первой данЪ 50 футовЪ, должно для сходственнаго ему бока требуемой фигуры $\alpha$, найти четвертой членЪ вЪ пропорцiи, которой тремя первыми будутЪ $3 : 2 = \overline{50}^2$ или $50 \times 50$: сей четвертой членЪ найдется $1666\frac{2}{3}$, и будетЪ квадратЪ искомаго бока; чего ради извлекши изЪ сего числа квадратной корень, получишь близу 40ф, 824 за величину желаемаго бока. А когда найдется бокЪ фигуры, то не трудно уже сдѣлать ее послѣ по предложенному способу (128).

Сей же самой способЪ можетЪ употребленЪ быть *кЪ опредѣленiю полупоперешника круга, котораго будетЪ дана площадь.*

Возми какое угодно число за полупоперешникЪ круга, и сыщи по показанному (145) площадь его. По томЪ посылай сiю пропорцiю: *какЪ найденная площадь круга кЪ площади требуемаго, такЪ квадратЪ полупоперешника перваго круга кЪ квадрату полупоперешника втораго..*

Можно найти также полупоперешникЪ по данному правилу (157).

164. *Ежели на каждомЪ боку* AB; BC, AC, *всякаго прямоугольнаго треугольника* ABC (фиг. 93) *сдѣланы будутЪ ква-*

*draты* BEFA, BGHC, AILC; *то квадратъ гипотенузы будетъ равенъ суммѣ двухъ прочихъ.*

Опустивъ изъ прямаго угла B на гипотенузу AC перпендикуляръ BD, получишь два треугольника BDA, BDC, изъ которыхъ каждой будетъ подобенъ треугольнику ABC (112); и слѣдовательно площади сихъ трехъ треугольниковъ будутъ находиться между собою, какъ квадраты сходственныхъ ихъ боковъ; то есть $ABD : \overline{AB}^2 = BDC : \overline{BC}^2 = ABC : \overline{AC}^2$ или $ABD : ABEF = BDC : BGHC = ABC : AILC$; почему (Ариѳ. 176) $ABD + BDC : ABEF + BGHC = ABC : AILC$. Но явствуетъ, что ABC равенъ двумъ частямъ своимъ $ABD + BDC$; слѣд. и AILC равенъ $ABEF + BGHC$, что также можно изобразить иначе $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$.

165. Какъ квадратъ гипотенузы равенъ суммѣ квадратовъ двухъ прочихъ боковъ прямаго угла, то заключимъ, *что квадратъ одного какого нибудь бока прямаго угла равняется квадрату гипотенузы безъ квадрата другаго бока*; то есть, $\overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{AB}^2$, и $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{BC}^2$.

166. *И такъ, когда два бока въ прямоугольномъ треугольникѣ извѣстны, можно всегда найти третiй.*

Пусть для примѣра требовалось бы узнать длину внутренняго ската вала, имѣющаго 18 футовъ въ основанiи, и 12 футовъ высоты.

| | |
|---|---|
| Складываю квадратъ 18ти . . . . . | 324 |
| съ квадратомъ 12ти . . . . . | 144 |
| Сумма . . . . . . . . | 468 |

есть квадратъ длины ската, коего корень 21,6 будетъ искомая длина.

Положимъ для втораго примѣру, что A (*фиг.* 94) представляетъ камеру подкопа, съ которою галлерея DB сообщается чрезъ колѣно BA 9ти футовъ. Потомъ предположивъ, что дѣйствiе пороха простирается во всѣ стороны на 25 футовъ, спрашивается опредѣлить часть въ галлереѣ BC, которую должно завалить, чтобъ она противустояла силѣ равно съ прочею землею.

Явствуетъ, что галлерею должно завалить на такое разстоянiе BC, чтобъ AC была равна 25ти футамъ; а какъ BC есть бокъ прямоугольнаго треугольника, то и найдется слѣдующимъ образомъ:

| | |
|---|---|
| Изъ квадрата 25ти. . . . | 625 |
| Вычитаю квадратъ 9ти. . | 81 |
| Остатокъ . . | 544 |

равенъ квадрату BC, и его корень 23,3 проста длинѣ, которую долженъ имѣть BC.

167. Можно также по свойству квадрата гипотенузы провесть перпендикуляръ къ прямой линѣѣ въ данную точку.

Пусть для примѣра на продолженiи EA фаса бастiона (*фиг.* 95.) надобно сдѣлать батарею перпендикулярно въ точкѣ A. Сдѣлай изъ веревки тре-

угольникъ ABC, котораго бы, естьли AB возмешь въ 3 фута на примѣръ, бокъ AC былъ 4хъ, а BC 5 футовъ, отъ чего AC произойдетъ перпендикулярна къ BA; ибо квадратъ 5 равенъ квадрату 4 съ квадратомъ 3.

168. Какъ квадратъ гипотенузы равенъ суммѣ квадратовъ прочихъ двухъ боковъ прямаго угла, то слѣдуетъ, что ежели прямоугольной треугольникъ будетъ равнобедренной, какъ-то бываетъ на пр. въ квадратѣ, когда проведется дïагональ AC (*фиг.* 96.), квадратъ гипотенузы будетъ тогда вдвое больше квадрата каждаго изъ прочихъ двухъ боковъ: почему площадь квадрата содержится къ площади квадрата дïагонали его, какъ 1 къ 2; и (Ариѳ. 182) бокъ квадрата къ дïагонали будетъ, какъ 1 къ квадратному корню изъ 2; а какъ сей корень не можетъ быть извлеченъ совершенно въ числахъ, то явствуетъ, что не можно узнать точнаго содержанïя въ числахъ между бокомъ квадрата и его дïагональю, то есть, что дïагональ остается не соизмѣрима или не имѣетъ никакой общей мѣры съ бокомъ его.

169. Показанное (164) свойство трехъ боковъ прямоугольнаго треугольника не только относится къ однимъ квадратамъ сихъ боковъ; но вообще, *ежели на трехъ бокахъ всякаго прямоугольнаго треугольника начертятся какïя нибудь подобныя фигуры, на пр. три треугольника, три круга и проч. то фигура сдѣланная на гипотенузѣ равна будетъ суммѣ подобныхъ ей фигуръ, начерченныхъ на двухъ прочихъ бокахъ.*

Сïе доказывается такимъ же образомъ, какъ въ квадратахъ, выводя заключенïе изъ

той истины (161), что площади подобныхъ фигуръ содержатся, какъ квадраты сходственныхъ ихъ боковъ.

170. По сей же причинѣ и площадь всякой фигуры, сдѣланной на боку прямаго угла равняется разности двухъ подобныхъ ей фугуръ, начерченныхъ на гипотенузѣ и другомъ боку прямаго угла.

171. Въ доказательствѣ (164) видѣли мы, что подобіе треугольниковъ ABC, ADB, CDB (*фиг.* 93) производитъ $ABC : \overline{AC}^2 = ABD : \overline{AB}^2 = BDC : \overline{BC}^2$, или также $ABC : ADB : BDC = \overline{AC}^2 : \overline{AB}^2 : \overline{BC}^2$; но какъ треугольники ABC, ABD, BDC будучи всѣ одной высоты, содержатся между собою какъ ихъ основанія (158), то есть $ABC : ADB : BDC = AC : AD : DC$; почему и $\overline{AC}^2 : \overline{AB}^2 : \overline{BC}^2 = AC : AD : DC$; *и такъ квадратъ гипотенузы къ квадратамъ двухъ прочихъ боковъ содержится такъ, какъ гипотенуза къ сходственнымъ отрѣзкамъ.*

172. Изъ сего можно вывести способъ дѣлать то посредствомъ линѣй, что мы дѣлали прежде въ числахъ (163); то есть начертить фигуру подобную данной другой, которой бы площадь находилась къ площади послѣдней въ предложенномъ содержаніи.

Проведи (*фиг.* 97.) линѣю не опредѣленной величины DE, на которой положи двѣ части DP и PE такія, чтобъ DP содержалась къ PE, какъ площадь данной фигуры должна быть къ площади искомой, то есть = 3 : 2, естьли надобно имѣть такую, которая была бы равна $\frac{2}{3}$ предложенной. На DE какъ поперешникѣ опиши полкруга DBE, и поставивши въ точкѣ P перпендикуляръ PB, проведи изъ точки B, въ которой онъ пересѣчетъ окружность, къ концамъ поперешника хорды DB и BE. На DB возьми часть BA равную боку AB данной фигуры, и проведши AC параллельную съ DE, получишь BC за сходственной бокъ искомой фигуры, которую послѣ начерти, какъ было показано (128). Вотъ тому причина: поелику площадь данной фигуры должна содержаться къ площади искомой какъ квадратъ бока AB находится къ квадрату искомаго бока, которой назовемъ $x$, то есть $= \overline{AB}^2 : \overline{x}^2$; но спрашивается также чтобъ сіи поверхности были одна къ другой = 3 : 2, то должно, чтобъ $\overline{AB}^2 : \overline{x}^2 = 3 : 2$; а какъ AB : BC = BD : BE, то и (Ариѳ. 181.) $\overline{AB}^2 : \overline{BC}^2 = \overline{BD}^2 : \overline{BE}^2$; треугольникъ DBE есть прямоугольной, слѣд. (171) $\overline{BD}^2 : \overline{BE}^2 = DP : PE$, то есть = 3 : 2; равнымъ образомъ и $\overline{AB}^2 : \overline{BC}^2 = 3 : 2$, а какъ $\overline{AB}^2 : \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 : \overline{x}^2$; слѣд. $x$ долженъ быть равенъ BC.

173. Слѣдуетъ еще изъ сказаннаго (171) и то, что *квадраты хордъ* AC, AD *и проч. проведенныхъ отъ конца поперешника* AB (фиг. 98), *содержатся между собою какъ части* AP, AO, *которыя отсѣкаются на поперешникѣ перпендикулярами, опущенными изъ концовъ тѣхъ хордъ.*

Ибо по проведенiи хордъ BC и BD, будетъ (171) въ прямоугольномъ треугольникѣ ACB,

$$\overline{AB}^2 : \overline{AC}^2 = AB : AP$$

А въ прямоугольномъ треугольникѣ ADB,

$$\overline{AD}^2 : \overline{AB}^2 = AO : AB.$$

Почему $\overline{AD}^2 : \overline{AC}^2 = AO : AP.$

## *О Плоскостяхъ.*

174. Показавъ мѣру и содержанiе плоскихъ поверхностей, остается еще намъ, прежде нежели приступимъ къ тѣламъ, разсмотрѣть свойства прямыхъ линѣй въ различныхъ ихъ положенiяхъ относительно къ плоскостямъ, равно какъ и свойства плоскостей въ разныхъ положенiяхъ ихъ между собою.

Мы не полагаемъ плоскостямъ никакой величины и никакой опредѣленной фигуры, представляемъ ихъ безпредѣльно во всѣ стороны простирающимися, и даемъ имъ фигуры единственно для облегченiя воображенiя.

175. *Прямая линѣя не можетъ быть въ одномъ мѣстѣ на плоскости, а въ другомъ выше или ниже ея.*

Ибо плоскость есть такая поверхность, къ которой (5) прямая линѣя прилагается всѣми своими частями.

176. *Тоже самое должно заключить и о плоскости, которая положена будетъ на другую.*

Ибо въ противномъ случаѣ прямая линѣя, проведенная въ одномъ общемъ мѣстѣ двумъ плоскостямъ, будучи продолжена неопредѣленно какъ въ той такъ и другой, нашлась бы отчасти въ какой нибудь плоскости выше, а отчасти ниже, чего однакожъ не можетъ случиться (175).

177. *Двѣ линѣи* AB, CD (фиг. 99), *пересѣкающіяся между собою, находятся въ одной плоскости.*

Ибо явствуетъ, что плоскость, приложенная къ одной линѣи AB, касаться должна неминуемо и всякой точкѣ, произвольно взятой на другой линѣѣ CD; когда же точка сѣченія E, такъ какъ принадлежащая AB, находится въ той же самой плоскости, почему CD имѣетъ уже двѣ точки на той плоскости; слѣд. она вся въ плоскости находится.

178. *Сѣченіе двухъ плоскостей должно быть непремѣнно прямая линѣя.*

Что сѣченіе двухъ плоскостей есть линѣя, въ томъ сомнѣваться отнюдь не можно, потому что плоскости не имѣютъ никакой толстоты; сверхъ того оно должно быть прямая линѣя, потому что прямая линѣя, проведенная отъ обѣихъ точекъ сѣченія, должна необходимо находиться въ каждой плоскости; слѣд. она есть самое сѣченіе.

*И такъ по одной прямой линѣи пройти можетъ безчисленное множество разныхъ плоскостей.*

179. *Перпендикулярною линѣею къ плоскости* называемъ мы такую линѣю, которая не наклоняется ни къ какой сторонѣ той плоскости.

180. *Почему перпендикулярная линѣя* AB *къ плоскости* GE (фиг. 100) *должна быть перпендикулярна ко всѣмъ линѣямъ* BC, BC, BC *и проч. проведеннымъ отъ конца ея* B *на той плоскости*; ибо когда бы она къ какой линѣи не была перпендикулярна, то бы она наклонилась къ той линѣи, и слѣд. къ самой плоскости.

181. *Ежели отъ конца* B *линѣи* AB, *перпендикулярной къ плоскости* GE (фиг. 101), *проведется въ той плоскости ли-*

*нѣя* BC, *и когда вообразимъ себѣ, что плоскость* ABC *начнетъ оборачиваться около* AB; *то линѣя* BC, *говорю я, не выдетъ при обращенiи семъ изъ плоскости* GE.

Представимъ себѣ плоскость ABC дошедшую до какого нибудь положенiя на примѣръ ABD; и такъ когда линѣя BC находясь въ положенiи BD, не будетъ въ плоскости GE, то плоскость ABD пересѣчетъ плоскость GE въ прямой линѣѣ BF, къ которой AB должна быть перпендикулярна (180); BF будетъ также перпендикулярна къ AB, но какъ мы предположили уже, что BD перпендикулярна къ AB въ той же точкѣ B, то слѣдуетъ, что изъ одной и той же точки B въ одной плоскости ABD, можно поставить два перпендикуляра къ линѣѣ AB, чего (25) сдѣлать со всѣмъ не можно; почему BF не можетъ разнствовать съ BD; и слѣд. BC не можетъ въ обращенiи своемъ около AB выпти изъ плоскости GE.

182. И такъ, *чтобъ прямая линѣя* AB (фиг. 101) *была перпендикулярна къ плоскости* GE, *для сего она должна быть перпендикулярна къ двумъ линѣямъ* BC *и*

BD, *пересѣкающимся при концѣ ея* B *въ той же плоскости.*

Ибо когда представимъ себѣ плоскость прямаго угла ABC обращающуюся около AB, то линѣя BC должна (181) начертить плоскость, къ которой AB будетъ перпендикулярна; при томъ утверждаю, что сія плоскость есть таже, что и плоскость GE двухъ линѣй BC и BD: ибо когда уголъ ABD есть прямой равно какъ и уголъ ABC, то линѣя BC оборачиваясь около AB, должна находиться необходимо въ одномъ положенiи съ линѣею BD; почему BD находится въ плоскости начерченной линѣею BC, и слѣд. AB перпендикулярна къ плоскости CBD.

183. *Ежели изъ точки* A *прямой линѣи* AI, *наклоненной къ плоскости* GE (фиг. 102), *опустится на ту плоскость перпендикуляръ* AB, *и когда по соединенiи точекъ* B *перпендикуляра* и I *косой линѣи прямою линѣею* BI, *проведется къ сей послѣдней перпендикуляръ* CD *въ той же плоскости* GE, *то* AI, *говорю я, будетъ также перпендикулярна къ* CD.

Возмемъ во первыхъ отъ точки I двѣ равныя части IC, ID, и проведемъ прямыя

линѣи BC и BD; обѣ сіи линѣи будутъ (27) равны; а посему и два треугольника ABC, ABD будутъ равны, ибо сверхъ прямыхъ угловъ ABC и ABD, они имѣютъ общій бокъ AB и BC равный BD, какъ то было выше доказано; почему сіи треугольники, имѣя по одному углу равному, заключающемуся между двумя равными боками, суть равны между собою; и такъ AD равна AC, слѣд. линѣя AI имѣя двѣ точки A и I равно отстоящія отъ точки C и точки D, должна быть перпендикулярна къ CD (30).

184. *Плоскость бываетъ перпендикулярна къ другой плоскости тогда, когда первая не наклоняется ни на какую сторону послѣдней.*

185. *Почему на одной и той же линѣѣ* CD (фиг. 103.), *лежащей въ плоскости* GE, *не можно поставить кромѣ одной перпендикулярной плоскости къ плоскости* GE.

186. *Плоскость* CK *бываетъ перпендикулярна къ другой* GE *тогда*, *когда она проходитъ чрезъ прямую линѣю* AB, *перпендикулярную къ сей послѣдней плоскости*: ибо нѣтъ никакого сомнѣнія, что она ни на какую сторону не можетъ наклониться къ плоскости GE.

187. *Естьли изъ точки* A, *взятой на плоскости* CK, *перпендикулярной къ плоскости* GE, *проведется перпендикулярная линѣя* AB *къ общему сѣченію* CD, *то она будетъ также перпендикулярна къ плоскости* GE.

Ибо естьли она не будетъ перпендикулярна, то можно изъ точки B, куда она упадетъ, поставить другой перпендикуляръ, и провести по сему перпендикуляру и чрезъ общую точку сѣченія CD плоскость, которая (186) будетъ перпендикулярна къ плоскости GE; а какъ не можно на одной линѣѣ CD, начерченной въ плоскости GE, поставить двухъ перпендикулярныхъ плоскостей (185); слѣд. AB перпендикулярна къ плоскости GE.

188. *И такъ, когда плоскость* CK *перпендикулярна къ плоскости* GE, *то перпендикуляръ* BA, *поставленной на плоскости* GE *изъ общей точки сѣченія* B, *будетъ непремѣнно находиться въ плоскости* CK.

Изъ сего предложенія слѣдуетъ, *что два перпендикуляра* BA и LM, *поставленные изъ разныхъ точекъ одной и той же плоскости* GE, *будутъ параллельны.*

Ибо естьли соединивъ концы B и L прямою линѣею BL, проведешь по сей линѣи и по AB плоскость CK, то плоскость сія будетъ перпендикулярна къ плоскости GE (186); а понеже LM также перпендикулярна къ плоскости GE, проведенной чрезъ точку L плоскости CK, слѣд. она будетъ въ плоскости CK (188); но когда двѣ линѣи AB, LM находясь въ одной плоскости, будутъ перпендикулярны къ одной и той же линѣи BL, то онѣ будутъ также и параллельны (36 и 37).

189. И такъ *естьли двѣ прямыя линѣи* AB, CD (фиг. 105) *будутъ параллельны каждая къ третіей* HF, *то онѣ будутъ также параллельны и между собою;* ибо линѣи AB, HF будучи между собою параллельны, могутъ быть обѣ и перпендикулярны къ одной плоскости GE; по той же причинѣ CD и HF могутъ быть перпендикулярны къ той же плоскости GE; и такъ AB и CD будучи перпендикулярны къ одной плоскости, будутъ и параллельны.

190. *Когда двѣ плоскости* CK, NL (фиг. 104) *перпендикулярны къ третіей* GE, *то общее ихъ сѣченіе* AB *будетъ также перпендикулярно къ плоскости* GE.

Ибо перпендикуляръ, поставленной изъ точки B на плоскости GE, долженъ (188) находиться въ каждой изъ обѣихъ тѣхъ плоскостей; почему онъ не иное что быть можетъ, какъ самое ихъ сѣченіе.

191. *Плоскимъ угломъ* называется отверстіе двухъ пересѣкающихся плоскостей GF, GE (*фиг.* 106); сей уголъ называется также *наклоненіемъ* одной плоскости къ другой.

Плоской уголъ, состоящій изъ двухъ плоскостей GF, GE, есть то количество, которое плоскость GF должна пройти, обращаясь около AG, до настоящаго своего положенія, естьли она прежде лежала на плоскости GE.

Изъ сего удобно понять можно, что ежели изъ точки B, взятой на общемъ сѣченіи AG, проведется въ плоскости GE перпендикулярная линѣя BD къ AG, а въ плоскости GF перпендикулярная BC къ той же самой AG; то уголъ, состоящій изъ двухъ плоскостей, есть тоже самое, что уголъ произшедшій изъ линѣй BD и BC; ибо явствуетъ, что во время обращенія плоскости GF, линѣя BC удаляется отъ линѣи BD, на которой она прежде лежала, точно на тоже количество, на какое плоскость GF отъ плоскости GE.

192. *И такъ плоской уголъ имѣетъ такую же мѣру, какую и прямолинѣйной, заключающійся между двумя линѣями, проведенными въ каждой изъ плоскостей, его составляющихъ, перпендикулярно къ общему сѣченію и изъ одной точки.*

Изъ сказаннаго столь легко увѣриться можно въ истинѣ слѣдующихъ предложеній, что мы ихъ представляемъ безъ всякаго доказательства.

193. *Плоскость упадая одна на другую, производитъ два угла, которые будучи взяты вмѣстѣ равняются 180 градусамъ.*

194. *Углы, составленные изъ многихъ плоскостей, проходящихъ чрезъ одну прямую линѣю, равняются 360 градусамъ.*

195. *Въ двухъ пересѣкающихся плоскостяхъ углы, противуположенные при верху, суть равны между собою.*

196. *Параллельныя плоскости* называются тѣ, которыя какъ бы далеко не были продолжены, никогда сойтися не могутъ.

Почему *параллельныя плоскости вездѣ равно отстоятъ одна отъ другой.*

197. *Когда двѣ параллельныя плоскости пересѣкутся третьею* (фиг. 107), *то сѣченія* AB, CD *будутъ двѣ прямыя параллельныя линѣи*; ибо обѣ сіи линѣи находятся въ одной и той же плоскости ABCD, и должны были бы сойтися между собою, естьли бы не были параллельны, а въ такомъ случаѣ сошлись бы и самыя плоскости.

198. *Двѣ параллельныя плоскости, пересѣченныя третіею, имѣютъ тѣ же самыя свойства въ углахъ, которые онѣ составляютъ съ сею третіею, какое и двѣ параллельныя прямыя линѣи въ разсужденіи третіей, ихъ пересѣкающей.* Сіе явствуетъ изъ сказаннаго (192).

## *Свойства прямыхъ линѣй, пересѣченныхъ параллельными Плоскостями.*

199. *Ежели изъ точки* I, *взятой внѣ плоскости* GE (фиг. 108), *проведутся къ разнымъ точкамъ* K, L, M *той плоскости прямыя линѣи* IK, IL, IM, *и когда сіи прямыя линѣи пересѣкутся другою плоскостью* ge, *параллельною съ плоскостью* GE; *то говорю я, что* 1 *е.*

*сіи прямыя линѣи будутъ пересѣчены пропорціонально; 2 е. фигура* klm *будетъ подобна* фигурѣ KLM.

Возмемъ сначала три точки K, L, M. И такъ когда прямыя линѣи $kl$, $lm$, $mk$ суть сѣченія плоскостей IKL, ILM, IKM, сдѣланныя плоскостью $ge$, то онѣ должны быть параллельны съ KL, LM, MK, сѣченіями тѣхъ же плоскостей посредствомъ плоскости GE (197): почему треугольники IKL, ILM, IMK подобны треугольникамъ $Ikl$, $Ilm$, $Imk$, и $IK : Ik = KL : kl = IL : Il = LM : lm = IM : Im = MK : mk$; но 1 е. ежели изъ сихъ равныхъ содержаній извлекутся одни только тѣ, которыя заключаютъ въ себѣ прямыя линѣи, проведенныя изъ точки I; то будетъ $IK : Ik = IL : Il = IM : Im$; и слѣд. прямыя линѣи IK, IL, IM пересѣчены пропорціонально.

2 е. Когда изъ сихъ же равныхъ содержаній возмешь одни тѣ, которыя заключаютъ въ себѣ линѣи, находящіяся въ двухъ параллельныхъ плоскостяхъ, то получишь $KL : kl = LM : lm = KM : km$; почему треугольники KLM, $klm$ будутъ подобны, понеже бока ихъ пропорціональны.

Положивъ же теперь произвольное число точекъ A, B, C, D, F и проч. докажется тѣмъ

же самымъ способомъ, что прямыя линѣи IA, IB, IC и проч. пересѣклись пропорціонально; по томъ вообразивъ діогонали AC, AD и проч. *ac*, *ad* и проч. проведенныя изъ сходственныхъ угловъ A и *a*, доказано будетъ, что треугольники ABC, ACD и проч. подобны треугольникамъ *abc*, *acd* и проч. почему оба многоугольники ABCDF, *abcdf* будучи составлены изъ одного числа подобныхъ между собою треугольниковъ и одинаково расположенныхъ, будутъ (128) и сами подобны.

200 Понеже двѣ фигуры KLM, *klm* подобны, то заключимъ изъ сего, что и уголъ KLM будетъ равенъ углу *klm*; и слѣд. *ежели двѣ прямыя линѣи* KL, LM *составляющія уголъ* KLM, *найдутся параллельными двумъ прямымъ* kl, lm, *заключающимъ уголъ* klm, *то уголъ* KLM *будетъ равенъ углу* klm *и тогда, когда сіи два угла не будутъ находиться въ одной плоскости*; мы упоминали уже о семъ предложеніи (43), но предполагали тогда оба тѣ угла находящимися въ одной плоскости.

201. Изъ подобія же двухъ фигуръ ABCDF и *abcdf*, также фигуръ KLM и *klm* слѣдуетъ еще и то, *что площади двухъ*

*сѣченій* abcdf и klm *находятся между собою, какъ площади двухъ* фигуръ ABCDF и KLM.

Ибо ABCDF : *abcdf* = $\overline{AB}^2 : \overline{ab}^2$ ( 161 ); но подобные треугольники IAB, I*ab* выводятъ пропорцію AB : *ab* = IA : I*a*, и слѣд. ( Ариѳ. 181 ) $\overline{AB}^2 : \overline{ab}^2 = \overline{IA}^2 : \overline{Ia}^2$, или (199) = $\overline{IM}^2 : \overline{Im}^2$, или ( по причинѣ подобія треугольниковъ ILM, I*lm* ) = $\overline{LM}^2 : \overline{lm}^2$; и на послѣдокъ ( 161 ) = KLM : *klm*; почему ABCDF : *abcdf* = KLM : *klm*, или ( Ариѳ. 171 ) ABCDF : KLM = *abcdf* : *klm*.

202. Сіе доказательство показываетъ также, что площади ABCDF, *abcdf* содержатся между собою, какъ квадраты двухъ прямыхъ линѣй IA и I*a*, проведенныхъ отъ точки I къ двумъ сходственнымъ точкамъ обѣихъ фигуръ, и слѣд. (199) какъ квадраты высотъ или перпендикуляровъ IP, I*p*, опущенныхъ изъ точки I на плоскости GE и *ge*.

И такъ заключимъ, что 1 е. ежели бы двѣ поверхности ABCDF, KLM были равны, то и поверхности *abcdf*, *klm* были бы также равны.

2 e. Что все предложенное нами можетъ имѣть мѣсто и тогда, когда точка I не будетъ общею прямымъ линѣямъ IA, IB, IC и проч. также прямымъ IM, IL, и проч. но для каждой фигуры опредѣлится особливо, лишъ только бы она находилась въ одинакой перпендикулярной высотѣ отъ плоскости *ge*.

---

## ОТДѢЛЕНІЕ ТРЕТІЕ

## *О Тѣлахъ.*

203. Мы назвали (1) *тѣломъ* все то, что имѣетъ три измѣренія *въ длину, ширину и глубину.*

Теперь заниматься будемъ мѣрою и содержаніями тѣлъ.

Мы намѣрены разсуждать о тѣлахъ ограниченныхъ плоскими поверхностями; а изъ тѣхъ, которыя окружаются кривыми, займемся только *цилиндромъ*, *конусомъ* и *шаромъ*.

Тѣла, ограниченныя плоскими поверхностями, различаются вообще числомъ и фигурою плоскостей, ихъ содержащихъ; сихъ плоскостей надобно быть по крайней мѣрѣ четыре для составленія тѣла.

204. Тѣло, у котораго двѣ какія нибудь противуположенныя стороны суть плоскости равныя и параллельныя, а прочія всѣ состоятъ изъ параллеллограммовъ, называется вообще *Призма*. Смотри *фиг.* 109, 110, 111, 112.

Почему можно почитать несомнѣнно, что призма происходитъ отъ движенія плоскости BDF, которая опустится параллельно сама къ себѣ по прямой линѣѣ AB (*фиг.* 109).

Двѣ параллельныя плоскости называются *основаніями* призмы, а перпендикуляръ LM, опущенный отъ одного основанія къ другому, именуется *высотою*.

Изъ понятія, которое мы дали о призмѣ, неоспоримо слѣдуетъ, что въ какомъ бы мѣстѣ не пересѣклась призма параллельною плоскостію съ основаніемъ ея, сѣченіе будетъ всегда плоскость совершенно равная основанію.

Линѣи такія на примѣръ какъ AB, которыя оканчиваются противуположенными параллелограммами, называются *боками* призмы.

*Прямая* призма бываетъ тогда, когда бока ея стоятъ перпендикулярно на основанiи; и въ такомъ случаѣ всѣ бока сiи равны высотѣ. *Смотри фиг.* 110 и 112.

Напротивъ *косая* призма есть та, которой бока наклоняются къ основанiю.

Призмы различаются числомъ боковъ, находящихся въ ихъ основанiи; когда въ основанiи будетъ треугольникъ, тогда призма называется *треугольная* (*фиг.* 109); а когда въ основанiи будетъ четвероугольникъ, то называется *четвероугольная* (фиг. 110); и такъ далѣе.

Въ четвероугольныхъ призмахъ отличаются особенно *параллелипипедъ* и *кубъ*.

Параллелипипедъ есть четвероугольная призма, которой основанiя и слѣдственно всѣ стороны состоятъ изъ параллелограммовъ; когдажъ параллелограммъ, служащiй основанiемъ будетъ прямоугольникъ, и призма та будетъ прямая, въ такомъ случаѣ именуется она *прямоугольнымъ параллелипипедомъ*. Смотри *фиг.* 110.

Когда прямоугольной параллелипипедъ имѣетъ въ основанiи квадратъ, и бокъ АВ

равный боку того квадрата, тогда получаетъ названiе *куба*.

Почему кубъ есть тѣло, ограниченное шестью квадратами, и посредствомъ-то сего тѣла измѣряются всѣ прочiя, какъ мы увидимъ это вскорѣ.

205. Цилиндръ есть тѣло, ограниченное двумя равными и параллельными кругами, и поверхностiю, которая происходитъ отъ обращенiя линѣи AB около окружностей обоихъ тѣхъ круговъ (*фиг.* 113 и 114.). Цилиндръ *прямой* называется тотъ, въ которомъ линѣя CF (*фиг.* 113.), соединяющая центры двухъ противоположенныхъ основанiй, бываетъ къ кругамъ перпендикулярна; сiя линѣя CF именуется *ось* цилиндра; напротивъ того *косой* цилиндръ бываетъ, когда таже линѣя CF наклоняется къ основанiю.

И такъ видѣть можно, что прямой цилиндръ происходитъ отъ обращенiя прямоугольника FCDE около своего бока CF.

206. *Пирамида* есть тѣло, заключенное между многими плоскостями, изъ коихъ та, которая служитъ *основанiемъ*, бываетъ какой нибудь *многоугольникъ*, а

прочія суть всѣ треугольники, которые имѣютъ основаніями бока того многоугольника, и соединяютъ верхи свои въ одной точкѣ, называемой *верхъ* пирамиды. *Смотри фиг.* 115, 116 и 117.

Перпендикуляръ AM, продолженный изъ верху пирамиды на плоскость, служащую ей основаніемъ, называется *высота* пирамиды.

Пирамиды различаются числомъ боковъ, находящихся въ основаніи ихъ; такимъ образомъ та, которая имѣетъ основаніемъ треугольникъ, называется *треугольная пирамида*; а та, коей служитъ основаніемъ четвероугольникъ, именуется *четвероугольная пирамида*, и такъ далѣе.

За *правильную* пирамиду принимаемъ мы ту, которой основаніемъ служитъ правильной многоугольникъ, и въ коей перпендикуляръ AM (*фиг.* 117.), опущенный изъ верху на основаніе, проходитъ чрезъ центръ многоугольника.

Перпендикуляръ AG, проведенный на какой нибудь бокъ DE основанія, называется *апотемою*.

Отсюда явствуетъ, что всѣ треугольники правильной пирамиды, сходящіеся въ одну точку A, должны быть равны и равнобедренны; потому что у всѣхъ ихъ осно-

ванія равны, и наклоненные бока AB, AC, AD и проч. также равны, понеже они ничто иное суть, какъ косыя линѣи, равно отстоящія отъ перпендикуляра AM (27).

Слѣд. и всѣ апотемы равны между собою.

207. *Конусъ* (фиг. 118 и 119) есть тѣло, содержащееся въ круглой плоскости BGDH, называемой *основаніемъ* конуса, и въ поверхости, которая происходитъ изъ того, когда линѣя AB будучи утверждена неподвижно въ точкѣ A, обойдетъ около окружности BGDH.

Точка A называется *верхъ* конуса.

Перпендикуляръ, проведенный изъ верху на плоскость основанія, называется *высота* конуса; и конусъ *прямой* или *косой* бываетъ тогда, когда перпендикуляръ сей проходитъ (*фиг.* 118), или не проходитъ (*фиг.* 119) чрезъ центръ основанія.

*Прямой конусъ* раждается отъ обращенія прямоугольнаго треугольника ACD (*фиг.* 118) около своего боку AC.

208. *Шаръ* есть тѣло, ограниченное со всѣхъ сторонъ такою поверхностію, которой всѣ точки равно отстоятъ отъ одной точки, въ срединѣ его помѣщенной; сія точка называется *центръ шара*.

Шаръ можно принимать за такое тѣло, которое происходитъ отъ обращенія полкруга ABD (*фиг.* 121) около поперешника своего AD.

И такъ явствуетъ, что всякое сѣченіе, сдѣланное въ шарѣ плоскостію, должно быть кругъ; естьли сія плоскость проходитъ чрезъ центръ, то сѣченіе называется *большимъ кругомъ* шара; на противъ того когда плоскость проходитъ въ какомъ нибудь другомъ мѣстѣ, то сѣченіе именуется *малымъ кругомъ*.

*Секторъ* или *вырѣзокъ шара* есть тѣло, которое производитъ круговой секторъ BCA обращеніемъ своимъ около радіуса AC; поверхность, описанная дугою AB при обращеніи ея, называется *сферической кругъ*.

*Сегментъ* или *отрѣзокъ шара* есть тѣло, которое происходитъ отъ обращенія половины круговаго сегмента AFB около части AF радіуса.

## *О подобныхъ Тѣлахъ.*

209. *Подобныя тѣла* суть тѣ, которыя состоятъ изъ одного числа подобныхъ и одинаково расположенныхъ сторонъ. *Смотри фиг.* 125.

210. *Почему сходственные бока и верхи сходственныхъ толстыхъ угловъ должны быть линѣи и точки подобно расположенныя въ двухъ тѣлахъ.* Ибо сходственные бока и верхи сходственныхъ толстыхъ угловъ суть линѣи, которыя располагаются подобно въ разсужденіи тѣхъ сторонъ, къ коимъ они принадлежатъ; а какъ сіи стороны предположили мы подобными, и притомъ одинаково расположенными въ двухъ тѣлахъ; то слѣдственно и проч.

211. А по сему и *треугольники* ACD, acd (фиг. 125), *соединяющіе толстой уголъ и концы сходственнаго бока въ каждомъ тѣлѣ, суть фигуры подобныя и подобно расположенныя въ двухъ тѣлахъ.*

Ибо концы сходственныхъ боковъ CD, cd суть сами верхи сходственныхъ толстыхъ угловъ, которые (210) занимаютъ одинакія мѣста въ подобныхъ тѣлахъ.

212. *Діагонали* AC, ac, *также* AD, ad *и проч. соединяющія два сходственные толстые угла, содержатся между собою, какъ сходственные бока* CD, cd *тѣхъ тѣлъ*; потому что какъ первые, такъ и послѣдніе, служатъ боками подобныхъ

треугольниковъ, показанныхъ въ предыдущемъ предложенiи.

213. Изъ сего слѣдуетъ, что два подобныя тѣла могутъ раздѣлены быть на одинакое число пирамидъ, подобныхъ порознь между собою, плоскостями, проведенными чрезъ два сходственные угла и по двумъ сходственнымъ бокамъ; ибо стороны сихъ пирамидъ будутъ состоять изъ подобныхъ треугольниковъ, одинаково расположенныхъ въ двухъ тѣлахъ (211); и основанiя ихъ будутъ подобны, понеже они суть сходственныя стороны двухъ тѣлъ; почему пирамиды сiи (209) должны быть подобны.

214. *Ежели изъ двухъ сходственныхъ угловъ опустятся перпендикуляры на двѣ сходственныя стороны, то сiи перпендикуляры будутъ содержаться между собою, какъ два какiе нибудь сходственные бока.*

Ибо какъ оба сходственные углы сiи расположены подобно въ разсужденiи двухъ сходственныхъ сторонъ (210), то они необходимо должны быть отъ сторонъ сихъ въ такихъ растоянiяхъ, которыя бы были въ одинаковомъ содержанiи съ прочими сход-

ственными протяженіями двухъ подобныхъ тѣлъ.

## *О измѣреніи Поверхностей Тѣлъ.*

215. Какъ поверхности призмъ и пирамидъ составляются изъ параллелограммовъ, треугольниковъ и многоугольниковъ прямолинѣйныхъ, то мы не намѣрены преподавать здѣсь новаго способа, какъ должно поступать при измѣреніи сихъ послѣднихъ, потому что о томъ довольно было говорено (139, 141 и 143). Выведемъ только изъ сказаннаго нѣкоторыя послѣдствія, кои не только послужатъ къ обьясненію дѣйствій, нужныхъ при семъ измѣреніи, но и еще будутъ полезны къ исчисленію поверхностей цилиндровъ, конусовъ и самаго шара.

216. *Наружная поверхность (та, которая принимается безъ двухъ основаній) всякой призмы, равна произведенію какого нибудь бока* AB *сей призмы на окруженіе сѣченія* bdfhk (фиг. 111), *сдѣланнаго плоскостію, къ которой бы бокъ* AB *былъ перпендикуляренъ.*

Ибо когда бокъ AB по положенію перпендикуляренъ къ плоскости *bdfhk*, то и

прочіе всѣ бока ему параллельные, будутъ также перпендикулярны къ сей плоскости; почему каждая въ особенности прямая линѣя *bd*, *df*, *fh*, *hk* и проч. будетъ перпендикулярна къ боку призмы, которой она пересѣкаетъ; и такъ принявъ бока AB, CD, EF и проч. за основаніе параллелограммовъ, ограничивающихъ призму, линѣи *bd*, *df*, *fh* будутъ ихъ высоты. Слѣдственно чтобъ получить поверхность призмы, надлежитъ помножить бокъ AB на перпендикуляръ *bd*, бокъ CD на перпендикуляръ *df*, и такъ далѣе, и сложить всѣ сіи произведенія; но какъ всѣ бока равны, то явствуетъ, что тоже самое выдетъ, когда помножишь одинъ бокъ AB на сумму всѣхъ высотъ, то есть на окруженіе *bdfhk*.

217. Поелику въ прямой призмѣ сѣченіе ни мало не различествуетъ отъ основанія BDFHK, и бокъ AB бываетъ высота призмы; то слѣдуетъ, что *наружная поверхность прямой призмы равна произведенію окруженія основанія, помноженнаго на высоту.*

218. Мы видѣли прежде (130), что кругъ можно принимать за правильной многоугольникъ, состоящій изъ безчисленнаго множества боковъ; почему цилиндръ можетъ быть принятъ за призму, которой число

параллелограммовъ, ограничивающихъ поверхность, будетъ безконечно; и слѣдовательно.

*Поверхность прямаго цилиндра равна произведенію высоты сего цилиндра, помноженной на окружность основанія его.* Способъ находить окружность былъ показанъ (146).

Можно также доказать, что *поверхность прямаго цилиндра равна двойной площади такого круга, котораго полупоперешникомъ будетъ средняя пропорціональная линѣя между высотою цириндра и полупоперешникомъ основанія его.*

Ибо принявъ за высоту H, за полупоперешникъ основанія $r$, а за средній пропорціональной полупоперешникъ R, также представивъ окружности, коихъ радіусы $r$ и R чрезъ *окр.* $r$ и *окр.* R, получишь по положенію $r : R = R : H$; а какъ окружности пропорціональны (131) радіусамъ своимъ, то будетъ также *окр.* $r$ : *окр.* $R = R : H$. Но произведеніе крайнихъ въ сей пропорціи есть поверхность цилиндра, а произведеніе среднихъ равна двойной площади круга, которой имѣетъ полупоперешникомъ R; слѣд. (Ариѳ. 168) и проч.

Впередъ для означенія площади круга, котораго за полупоперешникъ возмется какая нибудь линѣя R, будемъ писать сокращенно *кр.* R.

*Что касается до поверхности косыхъ цилиндровъ*, то для сысканія ее должно помножить длину AB цилиндра на окружность сѣченія *bgdh* (*фиг.* 114), такого сѣченія, говорю я, которое было показано (216). Какъ же способъ, служащій для опредѣленія длины сего сѣченія зависитъ отъ большаго познанія, какое мы доселѣ снискать могли; то въ практикѣ можно довольствоваться механическимъ измѣреніемъ, то есть, обернувъ цилиндръ ниткою (или чѣмъ другимъ для сего способнымъ) такъ, чтобъ она находилась въ такой плоскости, къ которой бы длина AB того цилиндра была перпендикулярна,

219. Для *поверхности пирамиды* надлежитъ, ежели она будетъ неправильная, сыскать порознь площади каждаго треугольника ее составляющаго, и сложить ихъ вмѣстѣ.

Но когда пирамида будетъ правильная, то скорѣе получишь поверхность ея, когда помножишь окруженіе основанія ея на поло-

вину перпендикулярной высоты AG какого нибудь треугольника (*фиг.* 117); ибо какъ всѣ треугольники въ правильной пирамидѣ бываютъ одной высоты, то стоитъ только умножить половину общей высоты на сумму всѣхъ основаній.

220. Принимая окружность круга за многоугольникъ, изъ безчисленнаго множества боковъ состоящій, заключить должно о конусѣ, что онъ въ самой вещи ничто иное есть, какъ правильная пирамида, которой наружная поверхность заключаетъ въ себѣ неисчетное множество треугольниковъ; и слѣдовательно *наружная поверхность прямаго конуса равна произведенію окружности основанія его на половину бока* AB (фиг. 118).

*Что касается до поверхности косаго конуса*, то мы оставляемъ теперь говорить; ибо средства, служащія для сего, зависятъ отъ большаго познанія Геометріи. Впрочемъ же принимая конусъ въ видѣ пирамиды, можемъ употребить для измѣренія поверхности косаго конуса слѣдующее средство, которое можетъ быть довольно достаточно. Надлежитъ раздѣлить окружность основанія на многое число дугъ такъ, чтобъ каждая изъ нихъ могла быть принята безъ чувствительной

погрѣшности за прямую линѣю, и по томъ поступать какъ съ пирамидою.

221. *Для сысканія поверхности прямаго усѣченнаго конуса, котораго противоположенныя основанія* BGDH, bgdh (фиг. 120) *параллельны; надлежитъ помножить бокъ* Bb *на половину суммы окружностей двухъ противолежащихъ основаній.*

Въ самой вещи можно почесть сію поверхность за соединеніе безчисленнаго множества трапецій такихъ, какъ EF*fe*, коихъ бока E*e*, F*f* простираются къ верху A; но площадь каждой сей трапеціи равняется полсуммѣ двухъ противоположенныхъ основаній EF, *ef*, помноженной на разстояніе сихъ самыхъ основаній (142); а какъ сіе разстояніе не различествуетъ ни чѣмъ отъ боковъ E*e*, F*f* или B*b*, то явствуетъ, что сумма всѣхъ трапецій найдется, когда половина суммы всѣхъ противолежащихъ основаній такихъ, какъ EF, *ef*, то есть половина суммы двухъ окружностей помножится на линѣю B*b*, общую высоту всѣмъ трапеціямъ.

222. Ежели чрезъ средину M бока B*b* проведется плоскость параллельно съ основаніемъ, то отъ сѣченія сего (199) про-

изойдетЪ такой кругЪ, коего окружность будетЪ равна половинѢ суммы окружностей, находящихся вЪ обоихЪ основаніяхЪ; потому что діаметрЪ его MN (142) равенЪ полсуммѢ поперешниковЪ тѢхЪ основаній, и что (131) окружности содержатся между собою какЪ ихЪ поперешники. СлѢдовательно *поверхность конуса, усѣченнаго параллельно съ основаніемъ, равняется произведенію бока* BЪ *на окружность сѣченія, сдѣланнаго въ равномъ растояніи отъ обоихъ противоположенныхъ основаній.* Предложеніе сіе послужитЪ намЪ также кЪ доказательству слѢдующаго.

223. *Поверхность шара равна произведенію окружности самаго большаго круга, помноженной на поперешникъ.*

Представь, что половина окружности **AKD** (*фиг.* 122) раздѢлена на великое множество дугЪ; каждая, изЪ сихЪ дугЪ *на пр.* KL будучи безпредѢльно мала, сольется сЪ своею хордою.

ОтЪ концовЪ дуги KL проведи кЪ поперешнику AD перпендикуляры KE, LF; изЪ средины I тойже дуги или хорды ея продолжи IH параллельно сЪ KE и радіусЪ IC; сей радіусЪ будетЪ (52) перпендикулярепЪ кЪ

KL; напослѣдокъ поставь KM перпендикулярно на IH или LF. Теперь вообрази себѣ, что половина окружности AKD стала бы оборачиваться около AD; и такъ явствуетъ, что она обращеніемъ своимъ произведетъ поверхность шара, а каждая изъ ея дугъ KL опишетъ поверхность усѣченнаго конуса, которая будетъ часть поверхности шара. Но мы увидимъ ниже, что поверхность сего усѣченнаго конуса равняется произведенію линѣи KM или EF, помноженной на окружность, имѣющую радіусомъ IC или AC.

Треугольникъ KML подобенъ треугольнику IHC, понеже оба сіи треугольники имѣютъ бока, кои по черченію суть перпендикулярны другъ къ другу. Изъ подобія сихъ треугольниковъ выводится (111) слѣдующая пропорція KL : KM = IC : IH, или (понеже окружности (131) содержатся какъ ихъ радіусы) KL : KM = *окр.* IC : *окр.* IH; а поелику во всякой пропорціи (Ариѳ. 168) произведеніе крайнихъ равно произведенію среднихъ, то KL × *окр.* IH равно KM × *окр.* IC, или все равно EF × *окр.* AC. Но (222) произведеніе первое изображаетъ поверхность усѣченнаго конуса, произшедшаго отъ обращенія дуги KL; почему сей безголовой конусъ равенъ EF × *окр.* AC, то есть произве-

денію высоты его EF на окружность большаго круга шара. А какъ принявъ и всякую другую дугу въ мѣсто KL, доказать можно тоже самое; то должно заключить, что сумма малыхъ усѣченныхъ конусовъ, составляющихъ поверхность шара, равна окружности большаго круга, помноженной на сумму высотъ сихъ конусовъ; но сія сумма безъ всякаго сомнѣнія составляетъ діаметръ. И такъ поверхность шара должна быть равна окружности большаго круга его, помноженной на поперешникъ.

224. Естьли вообразимъ такой цилиндръ (*фиг.* 123), которой бы окружалъ шаръ, касаясь къ нему, и имѣлъ высотою діаметръ его, то есть, ежели представимъ себѣ цилиндръ описанной около шара, то можно заключить, что *поверхность шара будетъ равна наружной поверхности того цилиндра*; ибо поверхность цилиндра равна произведенію окружности основанія на высоту; но окружность основанія есть таже, что и окружность большаго круга шара, а высота равна діаметру; слѣд. и проч.

225. Какъ (145) площадь круга состоитъ изъ произведенія окружности на половину радіуса или на четвертую часть

діаметра, а поверхность шара изъ окружности на весь діаметръ; то изъ сего явствуетъ, что *поверхность шара есть вчетверо больше самаго большаго круга его.*

226. Сдѣланное доказательство для поверхности шара можетъ служить равно и тому, что наружная поверхность сферическаго сегмента, происходящая отъ обращенія дуги AL (*фиг.* 124) около діаметра AD, состоитъ изъ окружности большаго круга шара, помноженной на высоту AI того сегмента; а чтобъ получить поверхность частицы шара, заключенной между двумя параллельными плоскостями напр. LKM, NRP, то должно умножить окружность большаго шара на высоту IO той части шара. Ибо можно принимать сіи поверхности, какъ и въ шарѣ, за безчисленное множество поверхностей усѣченныхъ конусовъ, изъ которыхъ каждой равенъ произведенію высоты своей на окружность большаго круга шара.

## *О содержаніи Поверхностей Тѣлъ.*

227. Сравнивая поверхности двухъ тѣлъ, ограниченныхъ неподобными и неправильными плоскостями, не иначе находимъ мы

содержаніе ихъ , какъ когда вычисливши порознь поверхность каждаго одинакою мѣрою, сравнимъ число мѣръ одной съ числомъ мѣръ другой, на пр. число квадратныхъ футовъ одной съ числомъ квадратныхъ футовъ другой.

228. *Наружныя поверхности призмъ содержатся между собою, какъ произведенія длины сихъ призмъ на окруженіе перпендикулярнаго къ сей длинѣ сѣченія.*

Ибо поверхности ихъ равны симъ произведеніямъ ( 216 ).

Почему *естьли длины призмъ будутъ равны , то поверхности ихъ будутъ содержаться между собою , какъ окруженіе перпендикулярнаго къ длинѣ каждой сѣченія.*

Ибо содержаніе длины на окруженіе сѣченія сего не перемѣнится, ежели въ каждомъ произведеніи уничтожится длина , общій множитель.

229. И такъ *поверхности прямыхъ призмъ и цилиндровъ одинакой высоты содержатся между собою, какъ окруженія основаній ихъ , какія бы впрочемъ не были сіи основанія.*

Но *ежели* напротивъ *окруженія основаній будутъ одинакія, а высоты разныя, то поверхности такія содержатся какъ высоты.*

230. *Поверхности прямыхъ конусовъ будутъ находиться между собою, какъ произведенія боковъ ихъ на окружности основаній, или на радіусы, или на діаметры тѣхъ же основаній.*

Ибо поверхности сіи будучи равны произведенію окружности основанія на половину бока конуса (220), должны содержаться между собою какъ сіи произведенія или какъ удвоенныя тѣже произведенія. А какъ сверхъ сего окружности имѣютъ одно содержаніе съ радіусами своими или діаметрами, то можно (99) поставить въ произведеніяхъ сихъ содержаніе радіусовъ или діаметровъ на мѣсто содержанія окружностей.

231. *Поверхности подобныхъ тѣлъ содержатся между собою, какъ квадраты сходственныхъ линѣй ихъ.*

Ибо онѣ состоятъ изъ плоскостей подобныхъ, которыхъ поверхности содержатся какъ квадраты сходственныхъ боковъ ихъ или линѣй; но сіи линѣи суть сходствен-

ные бока тѣлъ, и пропорціональны всѣмъ прочимъ сходственнымъ линѣямъ.

232. *Поверхности двухъ шаровъ находятся между собою, какъ квадраты ихъ полупоперешниковъ или поперешниковъ*; ибо какъ поверхность шара вчетверо больше площади большаго круга его, то поверхности двухъ шаровъ должны быть между собою, какъ учетверенные большіе ихъ круги, то есть (162) какъ квадраты радіусовъ или діаметровъ.

## *О Толщинѣ Призмъ.*

233. Дабы утвердиться въ понятіи, что мы должны разумѣть подъ толщиною тѣлъ, то надлежитъ представить себѣ мысленно частицу такого въ кубическомъ видѣ пространства, которое бы было безконечно мало въ длину, ширину и глубину, и по томъ вообразить, что внутренность тѣлъ наполнена вся подобными кубами, которые мы называть будемъ *толстыми точками*. Совокупность сихъ точекъ есть точно то, что мы именуемъ толщиною тѣлъ.

234. *Двѣ призмы или два цилиндра, или призма и цилиндръ одинакаго основанія и одинакой высоты, или равныхъ основаній и равныхъ высотъ, бу-*

*дутъ въ толщинѣ своей равны, какъ бы впрочемъ фигуры основаній ихъ различны не были.*

Ибо представь себѣ, что тѣла сіи разсѣчены были бы плоскостями параллельными съ ихъ основаніями на весьма тонкіе слои, коихъ бы высота ни чѣмъ не различествовала отъ толстыхъ точекъ, какими, по данному нами понятію, наполнены сіи тѣла; то явствуетъ, что понеже въ каждомъ тѣлѣ каждое сѣченіе равно основанію (204), число толстыхъ точекъ, составляющихъ каждой слой, будетъ во всѣхъ одинаково и равно числу поверхностныхъ точекъ основанія; а какъ предположили мы въ двухъ тѣлахъ одинакую высоту, то каждое изъ нихъ должно содержать одно число слоевъ; а потому въ цѣлости и одинакое число толстыхъ точекъ; слѣдовательно они равны въ толщинѣ.

## *О измѣреніи толщины Призмъ и Цилиндровъ.*

235. Образъ, въ какомъ мы представили толстыя точки, не только полезенъ особенно для доказательства равенства двухъ толщинъ чрезъ раздробленіе тѣлъ на безконечно тонкіе слои; но и еще сверьхъ то-

то будемъ имѣть случай представлять ихъ въ семъ видѣ. Однакожъ при обыкновенномъ измѣреніи внутренностей или толщинъ тѣлъ нѣтъ никакой нужды исчислять ихъ толстыми точками; ибо само по себѣ разумѣется, что всякое тѣло содержитъ ихъ безчисленное множество.

И такъ при измѣреніи толщины тѣлъ мы не иное что дѣлаемъ, какъ опредѣляемъ, сколько разъ данное тѣло содержитъ въ себѣ другое извѣстное. На примѣръ желая вымѣрять прямоугольной параллелипипедъ ABCDEFGH (*фиг.* 126), однимъ предметомъ имѣю узнать, сколько параллелипипедъ сей содержитъ въ себѣ такихъ кубовъ, какъ данный *x*; толщины тѣлъ исчисляются обыкновенно кубическою мѣрою.

И для того, *чтобъ узнать толщину прямоугольнаго параллелипипеда* ABCDEFGH, надлежитъ сыскать во первыхъ, сколько основаніе его EFGH содержитъ въ себѣ квадратныхъ частей такихъ на пр. какъ *efgh*, потомъ опредѣлить, сколько разъ высота его AH содержитъ высоту *ah*; по умноженіи числа квадратныхъ частей EFGH на число частей AH, произведеніе покажетъ, сколько данный параллелипипедъ вмѣщаетъ

въ себѣ кубовъ $x$; то есть, сколько содержитъ онъ кубическихъ футовъ, или кубическихъ дюймовъ и проч. когда бокъ $ab$ куба $x$ будетъ равенъ футу или дюйму.

Ибо видѣть можно, что на поверхности EFGH можно поставить столько кубовъ $x$, сколько на основанiи EFGH находится квадратовъ $efgh$. Всѣ сiи кубы составятъ вмѣстѣ параллелипипедъ, котораго высота HL будетъ равна $ab$; но явствуетъ также, что въ тѣлѣ ABCDEFGH помѣстить можно столько сихъ параллелипипедовъ, сколько высота AH заключаетъ въ себѣ высоту HL; и такъ должно взять сей параллелипипедъ или число кубовъ, лежащихъ на EFGH столь разъ, сколько находится частей въ AH; или понеже число сихъ кубовъ равно числу квадратовъ, содержащихся въ основанiи, то должно число квадратовъ, помѣщающихся на основанiи, помножить на число частей высоты, и произведенiе покажетъ число кубовъ, содержащихся въ данномъ параллелипипедѣ.

236. Понеже доказано (234.), что призмы одинакаго основанiя и одинакой высоты равны между собою; то слѣдуетъ изъ сего и предыдущаго предложенiя, что *для исчисленiя кубическихъ мѣръ, со-*

*державщихся въ какой нибудь призмѣ* ACEGIKBDFH (*фиг.* 111), надлежитъ опредѣлить основаніе ее KBDFH квадратною мѣрою, а высоту LM въ частяхъ равныхъ боку куба, принимаемаго за мѣру, и умножить число квадратныхъ мѣръ основанія на число линѣйныхъ мѣръ высоты, что выражаемъ иначе, говоря: *толщина всякой призмы равна произведенію площади основанія на высоту ея.*

Но мы должны замѣтить здѣсь тоже, что и въ примѣчаніи (139) показали касательно до площади; тамъ не можно было утвердить съ точностію, чтобъ линѣя умножалась линѣею, здѣсь не можно равно сказать, чтобъ поверхность умножалась линѣею. Не поверхность, какъ мы то видѣли, а самое тѣло (коего число кубовъ равно числу квадратовъ основанія) беремъ мы столько разъ, сколько высота его содержится въ высотѣ цѣлаго тѣла, то есть столько разъ, сколько она содержится въ измѣряемомъ тѣлѣ.

237. И такъ заключимъ изъ предыдущаго, что *толщина прямаго или косаго цилиндра состоитъ равно изъ площади основанія его, помноженной на вы-*

*сошу*; понеже цилиндрЪ равенЪ призмѣ одного сЪ нимЪ основанія и одной высоты (234).

## *О Толщинѣ Пирамидъ.*

238. ПриведемЪ на память сказанное (199 и слѣд.) и приноровивЪ оное кЪ пирамидамЪ заключимЪ, что ежели двѣ пирамиды IABCDF и KLM (*фиг.* 108) одинакой высоты, пересѣкутся плоскостію *ge* параллельною сЪ плоскостію основанія ихЪ (*); то сѣченія *abcdf*, *klm* будутЪ вЪ одинакомЪ содержаніи сЪ основаніями ABCDF, KLM, и слѣдовательно будутЪ они равны, когда основанія сіи найдутся равными. Теперь представимЪ, что сіи пирамиды были бы снова пересѣчены другою плоскостію параллельною сЪ прежнею *ge* вЪ самомЪ ближайшемЪ кЪ ней мѣстѣ; то явствуетЪ, что два толстые слоя, заключающіеся между двумя плоскостями вЪ самомЪ ближайшемЪ растояніи другЪ отЪ друга, должны находиться также вЪ одинакомЪ содержаніи сЪ основаніями; ибо число толстыхЪ точекЪ, которое нужно кЪ наполненію сихЪ двухЪ слоевЪ равной высоты, за-

---

(*) *Мы предполагаемЪ здѣсь для большей способности пирамиды, имѣющія общій верхЪ и стоящія на одной плоскости* GE.

висить единственно отъ величины сходственныхъ сѣченій.

Послѣ чего, принявъ двѣ пирамиды одной высоты, не можно вообразить себѣ, чтобъ было въ одной изъ нихъ больше или меньше слоевъ, нежели въ другой; а какъ сходственные слои должны быть въ одинакомъ содержаніи съ основаніями, то и суммы сихъ слоевъ, или лучше сказать толщины пирамидъ будутъ содержаться также, какъ основанія. Такимъ образомъ *толщины пирамидъ одинакой высоты содержатся между собою, какъ основанія ихъ, и слѣдовательно пирамиды одинакаго основанія и одинакой высоты будутъ равны въ толщинѣ, какой бы впрочемъ фигуры не были основанія ихъ.*

## *О измѣреніи Толщины Пирамидъ.*

239. Понеже мѣрять тѣло есть тоже, что искать, сколько оно содержитъ въ себѣ другое извѣстное, или вообще искать содержаніе его съ другимъ извѣстнымъ тѣломъ; почему при измѣреніи пирамидъ дѣло все состоитъ въ томъ, чтобъ найти содержаніе ихъ съ призмами; а для сего намѣрены мы предписать слѣдующее предложеніе.

240. *Всякая пирамида бываетъ втрое меньше призмы одного съ ней основанія и одной высоты.*

Доказательство сего предложенія выводится изъ того, что всякая треугольная пирамида составляетъ третью часть треугольной призмы одного съ ней основанія и одной высоты; ибо легко можно представить себѣ всякую призму за совокупленіе столькихъ треугольныхъ призмъ, а пирамиду за соединеніе стольких треугольныхъ пирамидъ, изъ скольких треугольниковъ состоитъ основаніе той или другой. *Смотри фиг. 111.*

Вотъ какимъ образомъ увѣряемся въ истинѣ предложенія касательно до треугольной парамиды. Разсуждая о треугольной призмѣ ABCDEF (*фиг.* 127), представь себѣ, что на сторонахъ AE, CE сей призмы проведены двѣ діагонали BD, BF, и по симъ діагоналямъ прошла плоскость BDF; плоскость сія отдѣлитъ отъ призмы пирамиду одного съ нею основанія и одной высоты, потому что та пирамида будетъ имѣть верхъ свой въ B на верхнемъ основаніи призмы, а основаніе DEF одно и тоже съ нижнимъ ея основаніемъ: отдѣленную сію пирамиду изображаетъ *фигура* 128; а

то, что остается вЪ призмѣ, представляетЪ *фигура* 129.

Когда поставимЪ остатокЪ сей на сторону ADFC, тогда увидимЪ вЪ немЪ не призму уже, но четвероугольную пирамиду, которой основанiемЪ будетЪ параллелограммЪ ADFC, а верхомЪ точка B: и такЪ вообразивЪ, что на основанiи ADFC проведена была бы дiагональ CD, легко увѣриться можно, что цѣлая пирамида ADFCB состоитЪ изЪ двухЪ треугольныхЪ пирамидЪ ADCB, CFDB, которыя имѣя основанiемЪ равные треугольники ACD, CDF, а верхомЪ общую точку B, будутЪ не обходимо (238) равны между собою. Но одна изЪ сихЪ пирамидЪ, именно пирамида ADCB можетЪ быть принята и за такую, которой послужитЪ основанiемЪ треугольникЪ ABC, то есть верхнее основанiе призмы, а верхомЪ точка D, принадлежащая кЪ нижнему ея основанiю; слѣдственно пирамида сiя равна пирамидѣ DEFB (*фиг.* 128), потому что она сЪ нею имѣетЪ одно основанiе и одну высоту; а посему и всѣ три пирамиды DEFB, ADCB, CFDB также равны между собою; но какЪ онѣ, совокуплены будучи вмѣстѣ, составляютЪ призму, то должно заключить, что каждая изЪ нихЪ есть третья часть

той призмы; и такЪ пирамида DEFB втрое меньше призмы ABCDEF одного сЪ нею основанія и одной высоты.

241. А какЪ конусЪ принимаемЪ мы за пирамиду, которой окруженіе основанія состоитЪ изЪ безчисленнаго множества боковЪ; а цилиндрЪ за призму, которой окруженіе основанія состоитЪ также изЪ безчисленнаго множества боковЪ; то надлежитЪ заключить, что *прямой или косой конусЪ есть третья часть цилиндра одного сЪ нимЪ основанія и одной высоты.*

242. *И такЪ, ежели потребуется найти толщину пирамиды или конуса (какихЪ бы то не было прямыхЪ или косыхЪ), надлежитЪ помножить площадь основанія на третью часть высоты.*

243. Для сысканія же толщины усѣченной пирамиды или безголоваго конуса, когда противоположенныя основанія ихЪ будутЪ параллельны, стоитЪ только сыскать высоту отрѣзной пирамиды; и тогда безЪ всякаго труда получишь толщину цѣлой, отрѣзной, и слѣдовательно усѣченной пирамиды. На примѣрЪ когда вЪ *фигурѣ* 108 требуется узнать толщину усѣченной пирамиды KLM*klm*, то явствуетЪ (242), что

площадь основанія KLM должно помножить на третью часть высоты IP; равнымъ образомъ площадь $klm$ помножить на треть высоты $Ip$, и вычесть послѣднее произведеніе сіе изъ перваго; но какъ не извѣстна ни высота цѣлой, ни высота усѣченной пирамиды, то вотъ какимъ образомъ опредѣлить можно и ту и другую. Мы видѣли выше (199), что линѣи IL, IM, IP и проч. пересѣчены пропорціонально плоскостію $ge$, и содержатся къ частямъ своимъ $Il$, $Im$, $Ip$, какъ LM : $lm$; почему будетъ LM : $lm$ = IP : $Ip$.

Также (Ариѳ. 174) LM — $lm$ : LM = IP — $Ip$ : $Ip$ то есть, LM — $lm$ : LM = P$p$ : IP

Но какъ въ данной усѣченной пирамидѣ можно удобно вымѣрять бока LM, $lm$ и высоту P$p$; почему по извѣстнымъ тремъ членамъ послѣдней пропорціи найдешь четвертой $Ip$, или высоту цѣлой пирамиды, а отнявши изъ оной высоту усѣченной пирамиды, получишь высоту $Ip$ отрѣзной.

## *О толщинѣ Шара, Секторовъ его и Сегментовъ.*

244. *Для исчисленія толщины шара, надлежитъ помножить поверхность его на третью часть полупоперешника*

Ибо поверхность шара можно принять за совокупленіе безчисленнаго множества безконечно малыхъ плоскостей, изъ коихъ каждая служитъ основаніемъ маленькой пирамидѣ, имѣющей верхъ при центрѣ, и слѣд. высотою радіусъ; также (242) каждая изъ сихъ пирамидъ равна произведенію основанія на треть высоты своей, то есть на треть радіуса; явствуетъ, что всѣ онѣ вмѣстѣ должны быть равны суммѣ всѣхъ основаній своихъ, помноженной на треть радіуса, то есть равны произведенію поверхности шара на третью часть полупоперешника его.

245. А поелику поверхность шара (225) вчетверо больше площади самаго большаго круга его, *то можно также найти толщину шара помноженіемъ четверной площади большаго круга на третью часть полупоперешника, или наконецъ помноженіемъ $\frac{2}{3}$ поперешника на площадь большаго круга.*

246. Видѣли мы выше, что для сысканія толщины цилиндра, надлежало помножить площадь основанія его на высоту; почему, когда дѣло будетъ итти о цилиндрѣ, описанномъ около шара (*фиг.* 123), можно заключить, что толщина его равна произ-

веденію большаго круга шара на поперешникЪ; а толщина шара (245) равна произведенію большаго круга на $\frac{2}{3}$ поперешника; и слѣд. *толщина шара равна* $\frac{2}{3}$ *толщины описаннаго около его цилиндра.*

Когда угодно сравнить толщину шара сЪ кубомЪ поперешника его; то принявЪ D за поперешникЪ, получишь $\frac{2}{3}$ D × *окр.* D для толщины шара, или также $\frac{2}{3}$ D × *окр.* D × $\frac{1}{4}$ D, или $\frac{1}{6}\,\overline{D}^2 \times$ *окр.* D. А кубЪ діаметра будетЪ $\overline{D}^3$, почему толщина шара кЪ кубу діаметра его содержится какЪ $\frac{1}{6}\,\overline{D}^2 \times$ *окр.* D : $\overline{D}^3$, или = $\frac{1}{6}$ *окр.* D : D, или *окр.* D : 6 D; то есть какЪ окружность круга кЪ шести діаметрамЪ своимЪ. И принявЪ содержаніе поперешника кЪ окружности на пр. 22 : 7; толщина шара кЪ кубу поперешника его будетЪ какЪ 22 : 42, или какЪ 11 : 21.

247. Поверхность выпуклистаго круга AGBHEA, служащаго основаніемЪ вырѣзку CBGEHA шара (*фиг.* 121), можетЪ быть принята также за соединеніе безчисленнаго множества безконечно малыхЪ плоскостей, и слѣд. самЪ вырѣзокЪ шара можетЪ почитаемЪ быть за совокупленіе неисчетнаго множества пирамидЪ, которыхЪ высота будетЪ полупоперешникЪ, а сумма основаній

составитъ поверхность выпуклистаго круга; *почему вырѣзокъ шара равенъ произведенію площади выпуклистаго круга на* $\frac{1}{3}$ *полупоперешника.* Выше показано было (226), какъ находится площадь выпуклистаго круга.

248. Что касается до отрѣзка, то явствуетъ, что онъ равенъ вырѣзку CBGEHA безъ конуса CBGEH; почему весьма удобно найти можно толщину его; однакожъ она еще легче найдется посредствомъ слѣдующаго предложенія.

*Толщина отрѣзка* ABGEHA *шара* (фиг. 121) *равна толщинѣ такого цилиндра, у котораго будетъ полупоперешникомъ основанія стрѣлка* AF, *а высотою полупоперешникъ* CA *шара безъ* $\frac{1}{3}$ *стрѣлки* AF.

Представимъ толщину сего отрѣзка, какъ бы разсѣченную на безчисленное множество тончайшихъ круговыхъ слоевъ, параллельныхъ съ BGHE; въ такомъ случаѣ число толстыхъ точекъ каждаго слоя, завися единственно отъ круговаго сѣченія, можетъ представлено быть тѣмъ самымъ сѣченіемъ; и для того на пр. за слой соотвѣтствующій IN, примемъ *окр.* IN.

А проведя хорду AN, по причинѣ прямоугольнаго треугольника AIN (170) получишь *кр.* IN равный *кр.* AN безъ *кр.* AI; почему сумма круговъ IN или толщина отрѣзка будетъ равна суммѣ круговъ AN безъ суммы круговъ, соотвѣтствующихъ AI. Теперь посмотримъ, что изображаетъ каждая изъ сихъ двухъ суммъ.

Понеже AN (173) есть средняя пропорціональная между AI и AD, то кругъ AN (218) долженъ быть равенъ половинѣ поверхности цилиндра, имѣющаго основанiіемъ полупоперешникъ AI, а высотою AD. Почему сумма круговъ AN будетъ равна суммѣ круговыхъ поверхностей, коихъ высота остается одна и таже AC, а въ основаніи полупоперешники перемѣняются безпрестанно въ различныя линѣи AI. И такъ сумма круговъ AN равна толщинѣ цилиндра, котораго высотою будетъ AC, а основаніемъ полупоперешникъ AF.

Въ разсужденіи суммы круговъ AI; ежели на AC начертишь квадратъ и проведши діагональ AP, продолжишь NI до R, то получишь AI равную IR; почему сумма круговъ AI будетъ равна суммѣ круговъ IR, которая, считая отъ A до F, составляетъ конусъ, имѣющій высотою AF, а основа-

ніемъ *кр.* FS или *кр.* AF. Она равна по этому какъ сему конусу, такъ и такому цилиндру, котораго основаніемъ остается тотъ же кругъ AF, а высотою возмется уже $\frac{1}{3}$ AF. И такъ сумма круговъ AN безъ суммы круговъ AI, то есть сумма круговъ NI, или толщина отрѣзка равна цилиндру, имѣющему основаніемъ кругъ AF а высотою AC, безъ цилиндра, котораго основаніемъ будетъ тотъ же кругъ AF, а высотою $\frac{1}{3}$ AF; то есть равенъ цилиндру такому, котораго будетъ основаніемъ кругъ AF а высотою AC — $\frac{1}{3}$ AF.

И такъ толщина отрѣзка шара найдется, когда кругъ, имѣющій полупоперешникомъ стрѣлку, умноженъ будетъ на полупоперешникъ шара безъ трети стрѣлки.

Дабы показать примѣромъ измѣреніе толщины шара и его сегментовъ, положимъ, что требуется узнать вѣсъ бомбы 10 дюймовъ въ діаметрѣ, которой пустота заключаетъ 7 дюймовъ въ поперешникѣ, а отверстіе расширено къ пустотѣ на $\frac{1}{2}$ дюйма стрѣлки. Кубической футъ чугуна вѣситъ 519 $\frac{3}{4}$ фунтовъ (*).

Вычисли вопервыхъ толщину шара 10 дюймовъ въ діаметрѣ; потомъ толщину пустоты, то есть

---

(*) Здѣсь и въ другихъ примѣрахъ относящихся до фортификаціи и артилеріи разумѣются вѣсъ и мѣра французскія.

шара 7 дюймовъ, но вычисли сїю послѣднюю съ отнятїемъ у ней толщины отверстїя на $\frac{1}{2}$ дюйма стрѣлки, то есть найди сегментъ шара, котораго стрѣлка будетъ 6 $\frac{1}{2}$ дюймовъ.

Для толщины шара 10 дюймовъ надлежитъ (246) умножить кубъ поперешника его на $\frac{11}{21}$; и производя дѣйствїе въ логориѳмахъ, поступай:

| | | |
|---|---|---|
| | Лог: 10 . . . . . . . . | 1,0000000 |
| | Лог. $\overline{10}^{3}$ . . . . . . . . | 3,0000000 |
| | Лог. 11 . . . . . . . . | 1,0413927 |
| Допол. | Лог. 21 . . . . . . . | 8,6777807 |
| | Сумма . . . . . . | 12,7191734 |

Которой отвѣчаетъ 523, 81; и такъ толщина шара 10 дюймовъ въ дїаметрѣ будетъ 523,81 кубическихъ дюймовъ.

Но чтобъ сыскать толщину сегмента 6 $\frac{1}{2}$ дюймовъ стрѣлки въ шарѣ 7 дюймовъ, надлежитъ (248) помножить площадь круга, коего полупоперешникомъ будетъ 6 $\frac{1}{2}$ на полупоперешникъ шара безъ трети стрѣлки; то есть на 1 $\frac{1}{3}$ дюйма.

И такъ по сказанному (157) производя дѣйствїе въ логариѳмахъ, получишь:

| | |
|---|---|
| Лог 6 $\frac{1}{2}$ . . . . . . . . | 0,8129134 |
| Лог. $\overline{6\frac{1}{2}}^{2}$ . . . . . . . . | 1,6258268 |
| Лог. $\frac{22}{7}$ . . . . . . . . | 0,4973247 |
| Лог. 1 $\frac{1}{3}$ . . . . . . . . | 0,1249387 |
| Сумма . . . . | 2,2480902 |

Которой отвѣчаетъ числу . . . 177,05

Почему толщина пустоты бомбы равна 177,05 кубическимъ дюймамъ; и слѣдовательно въ бомбѣ находится 346,76 кубическихъ дюймовъ чугуна.

Наконецъ, чтобъ сыскать вѣсъ бомбы, стоитъ только 346,76 ддд умножить на $519\frac{3}{4}$ и раздѣлить произведенїе на 1728, потому что вѣсъ кубическаго дюйма равняется 1728 части вѣсу кубическаго фута; того ради

| | | |
|---|---|---|
| | Лог. 346,76 . . . . . . . | 2,5400290 |
| | Лог. $519\frac{3}{4}$ . . . . . . . | 2,7157945 |
| Допол. | Лог. 1728 . . . . . . . | 6,7624563 |
| | Сумма . . . . . . . . . | 12,0182798 |

Которой отвѣчаетъ . . . . 104, 3 фунтамъ.

Итакъ вѣсъ бомбы, исключая пустоту отверстїя и вѣсъ ушей и колецъ, будетъ состоять изъ 104, 3 фунтовъ.

## *О измѣренїи прочихъ Тѣлъ.*

249. Что касается до прочихъ тѣлъ, ограниченныхъ плоскими поверхностями, то способъ самъ собою представляющїйся къ измѣренїю ихъ, состоитъ въ томъ, чтобъ воображать ихъ сложенными изъ пирамидъ, которыхъ основанїями служатъ плоскїя тѣ поверхности, а общимъ верхомъ какой нибудь уголъ даннаго тѣла; какъ же способъ сей рѣдко бываетъ способенъ въ практикѣ, то мы покажемъ другой слѣдующїй.

250. Подъ именемъ *усѣченной призмы* мы будемъ разумѣть такое тѣло ABCDEF

(*фиг.* 130), которое остается по отсѣченіи части отъ призмы плоскостію ABC, наклоненною къ основанію ея.

251. *Усѣченная треугольная призма состоитъ изъ трехъ пирамидъ, изъ которыхъ каждая основаніемъ имѣетъ основаніе* DEF *призмы, а верхомъ первая точку* B, *вторая* A, *а третья* C.

Съ самымъ малѣйшимъ вниманіемъ можно примѣтить, что усѣченная призма сія состоитъ изъ двухъ пирамидъ, изъ одной треугольной, которой верхъ будетъ въ точкѣ B, а основаніе треугольникъ DEF; изъ другой четвероугольной, которой верхъ будетъ въ точкѣ B, а основаніе четвероугольникъ ADFC.

Естьли въ семъ четвероугольникѣ проведется діагональ AF, то четвероугольная пирамида представится раздѣленною на двѣ треугольныя BADF и BACF; но пирамида BADF равна *толщиною* пирамидѣ EADF, кои имѣя одно основаніе ADF, будутъ имѣть верхъ свой въ точкѣ E, потому что линѣя BE параллельна съ плоскостію ADF, и слѣд. обѣ сіи пирамиды будутъ одной высоты; но пирамида EADF можетъ принята быть и за такую, которая имѣетъ основаніемъ

EDF, а верхомъ точку A; почему и получаемъ мы уже три такія пирамиды, которыя по предложенію нашему входятъ къ составленію усѣченной призмы; теперь остается намъ показать, что пирамида BACF будетъ одинаковой толщины съ такою, которая имѣетъ основаніемъ EDF, а верхомъ точку C; но сіе удобно доказать можно, проведши діагональ CD; ибо обѣ сіи пирамиды BACF и EDCF имѣя верхи свои въ B и E на одной и той же линѣѣ BE, параллельной съ плоскостію ACFD ихъ основаній, будутъ имѣть и основанія ACF и CFD равныя, понеже они суть треугольники, стоящіе между параллельными AD и CF на одномъ основаніи FC; почему пирамида BACF равна пирамидѣ EDCF; но сія послѣдняя можетъ принята быть и въ видѣ такой, которая имѣетъ основаніемъ DEF, а верхомъ C; слѣдовательно усѣченная призма состоитъ въ самой вещи изъ трехъ пирамидъ, изъ которыхъ каждая основаніемъ имѣетъ треугольникъ DEF, а верхомъ первая точку B, вторая A, а третія C.

252. И такъ, *чтобъ сыскать толщину усѣченной треугольной призмы, надлежитъ изъ всѣхъ угловъ верхняго основанія опустить перпендикуляры на*

*нижнее основаніе, и помножить нижнее основаніе на треть суммы всѣхъ трехъ перпендикуляровъ.*

253. Изъ предыдущаго предложенія можно вывести многія послѣдствія, служащія къ измѣренію не однихъ треугольныхъ, но и прочихъ усѣченныхъ призмъ, также и всякихъ другихъ тѣлъ; на примѣръ ежели изъ всѣхъ угловъ тѣла, ограниченнаго плоскими поверхностями, проведутся на плоскость, произвольно взятую, перпендикуляры, то произойдетъ столько усѣченныхъ призмъ, сколько находится сторонъ въ томъ тѣлѣ; а какъ всякую призму по предписаннымъ правиламъ удобно вымѣрять можно, то и все тѣло, ограниченное плоскими поверхностями тѣмъ же способомъ вымѣрено быть можетъ.

254. На примѣръ требуется найти толщину тѣла ABCDHEFG (*фиг.* 131 и 132), состоящаго изъ двухъ усѣченныхъ треугольныхъ призмъ, коихъ бока AE, BF, CG, DH, пусть будутъ перпендикулярны къ основанію какого нибудь четвероугольника.

Вообразивъ діагональ EG, сходственную съ AC, получишь $EFG \times \frac{AE + BF + CG}{3}$ для толщины части, соотвѣтствующей треугольнику EFG; равнымъ образомъ получишь $EHG \times \frac{AE + DH + CG}{3}$ для толщины части, принадлежащей треугольнику EHG.

255. Естьли треугольники EFG и EHG будутъ равны, какъ это случиться можетъ въ параллелограммѣ, то $\frac{1}{2}$ EFGH $\times \frac{2AE + 2CG + BF + DH}{3}$ будетъ представлять всю толщину.

256. Когда же оставивъ перпендикуляры AE, BF, и проч. тѣ же, на поверхности верхней вмѣсто сѣченія AC, сдѣлаешь сѣченіе BD; въ такомъ случаѣ толщина должна изобразиться $\frac{1}{2}$ EFGH $\times \frac{2BF + 2DH + AE + CG}{3}$.

И когда сложивъ толщину сію съ предыдущею, возмешь изъ всего половину, то EFGH $\times \frac{BF + DH + AE + CG}{4}$ будетъ соотвѣтствовать средней толщинѣ между двумя тѣми, которыя сысканы порознь для каждой фигуры.

257. Хотя послѣднее изображеніе сіе выводитъ правило, которому многіе практики послѣдуютъ при измѣреніи толщины такихъ тѣлъ, какія представлены *фигурами* 131 и 132; однакожъ явствуетъ, что правило сіе не весьма точно, и можно сказать даже, что оно производитъ часто великую погрѣшность; а дабы увѣриться опытомъ, то для примѣра положимъ, что въ *фиг.* 132 бока AE и GC никакой высоты не имѣютъ; и такъ $\frac{1}{2}$ EFGH $\times \frac{BF + DH}{3}$ или EFGH $\times \frac{BF + DH}{6}$ должны представлять толщину тѣла изображеннаго *фиг.* 132; но по объявленному правилу надлежало бы ее представить чрезъ EFGH $\times \frac{BF + DH}{4}$; а какъ обѣ толщины сіи находятся между собою какъ $\frac{1}{6} : \frac{1}{4}$ или $= 4 : 6$ или $= 2 : 3$, то слѣдуетъ, что найденная по послѣднему правилу толщина выходитъ половиною больше настоящей; правда что въ семъ случаѣ, гдѣ тѣло, какъ легко примѣтить можно, состоитъ изъ двухъ треугольныхъ пирамидъ, правила сего употреблять не должно, совсѣмъ тѣмъ не меньше заключить

должно изъ сего простаго примѣра, что и въ другихъ случаяхъ оно не можетъ быть достаточнымъ.

258. Какъ мы не предполагали отнюдъ, чтобъ ABC и ADC (*фиг.* 131 и 132) находились въ различныхъ плоскостяхъ, то все сказанное нами имѣетъ мѣсто, когда они будутъ находиться въ одной и той же плоскости; а понеже объявленное (254) имѣетъ также мѣсто, когда въ основанїи будетъ какой нибудь четвероугольникъ, то изъ сего можно вывести способъ для измѣренїя толщины понтона (*фиг.* (133).

Передъ и задъ понтона, стороны его, дно и верхнее отверстїе суть поверхности плоскїя, и бока съ противолежащихъ сторонъ даны параллельныя линѣи; отверстїе шире дна, и потому сдѣланное перпендикулярно сѣченїе представляетъ трапецїю на пр. EFGH.

Ежели разсѣчется понтонъ перпендикулярно въ длину и по срединѣ, то изъ сказаннаго (254) явствуетъ, что каждая половина его будетъ состоять изъ двухъ усѣченныхъ треугольныхъ призмъ, изъ которыхъ первая изобразится чрезъ $EHG \times \frac{AE + DH + CG}{3}$ или $EHG \times \frac{2\,AE + CG}{3}$, потому что AE равно DH. Равнымъ образомъ другая треугольная призма изобразится чрезъ $EFG \times \frac{2\,CG + AE}{3}$; почему весь понтонъ представлять будетъ величина $EHG \times \frac{2\,AI + CL}{3} + EFG \times \frac{2\,CL + AI}{3}$; а какъ глубина понтона извѣстна, то и общая высота обоихъ треугольниковъ найдется; послѣ чего удобно исчислить можно площади ихъ, и слѣд. толщину всего понтона. Примѣръ сего не умедлимъ показать ниже.

## *О измѣренїи Толщины Тѣлъ Саженями.*

259. Вымѣрять толщину тѣла саженями значитъ сыскать величину его въ куби-

ческихъ саженяхъ и кубическихъ частяхъ кубической сажени, то есть, въ кубическихъ футахъ, въ кубическихъ дюймахъ и проч.

*Кубическая сажень* содержитъ 343 кубическихъ футовъ, потому что она представляется такимъ кубомъ, которой въ длину, ширину и высоту имѣетъ по 7 футовъ.

*Кубической футъ* состоитъ изъ 1728 кубическихъ дюймовъ, потому что онъ есть кубъ, имѣющій въ длину, ширину и высоту по 12 дюймовъ.

*Кубической дюймъ*, имѣя въ длину, ширину и высоту по 10 линѣй, заключаетъ въ себѣ 1000 кубическихъ линѣй; и такъ далѣе.

Почему, дабы вымѣрять толщину тѣла въ кубическихъ саженяхъ и кубическихъ частяхъ кубической сажени, надлежитъ привести всѣ три протяженія или измѣренія его въ самой меньшой сортъ мѣры; помножить между собою два какія нибудь, приведенныя такимъ образомъ протяженія, по томъ произведеніе сіе умножить опять на остальное третіе; а чтобъ привести малѣйшій сортъ мѣры на примѣръ кубическіе скрупулы въ кубическія линѣи, въ кубическіе дюймы, кубическіе футы и кубическія

сажени, должно дѣлить попеременно на 1000, 1000, 1728 и 343; или дѣлить только на 1000, 1728 и 343, естьли малѣйшій сортъ мѣры будетъ данъ въ кубическихъ линѣяхъ.

ПРИМѢРЪ.

Требуется найти толщину параллелипипеда, имѣющаго въ длину 6с, 5ф, 7д; въ ширину 3с, 4ф, 8д; а въ высоту 10с, 2ф, 3д.

6с 5ф 7д. . . . . . . . . . . . . 571 д.
3с 4ф 8д. . . . . . . . . . . . . 308 д.
175868 дд.
10с 2ф 3д. . . . . . . . . . . . . 867 д.
152477556 ддд

152477556 | 1728
564 | 88239 ффф.

88239 | 343
88 | 257 ссс.

И такъ параллелипипедъ сей состоитъ изъ 257ссс 88ффф 564ддд.

260. Показавъ во второмъ отдѣленіи сей Геометріи (152) способъ измѣренія площадей въ квадратныхъ тоазахъ и частяхъ квадратнаго тоаза, почитаемъ за нужное для тѣхъ же причинъ, о которыхъ упомянули тамъ, изъяснить его и здѣсь касательно до исчисленія толщины тѣлъ въ кубическихъ тоазахъ и частяхъ кубическаго тоаза.

Измѣреніе толщины въ кубическихъ тоазахъ и частяхъ кубическаго тоаза есть двоякое, первое точно сходствуетъ съ тѣмъ

которое мы показали (259) въ саженяхъ, щитая кубическими тоазами, кубическими футами, кубическими дюймами и проч.

*Кубической тоазъ* состоитъ изъ 216 кубическихъ футовъ, потому что онъ есть кубъ длиною, шириною и высотою 6 футовъ.

Кубической футъ заключаетъ въ себѣ 1728 кубическихъ дюймовъ, потому что онъ есть кубъ длиною, шириною и высотою 12 дюймовъ.

Для той же причины кубической дюймъ содержитъ въ себѣ 1728 кубическихъ линѣй, и такъ далѣе.

На примѣръ, желая сыскать толщину параллелипипеда, коего длина 2т 4ф 8д, ширина 1т 3ф; а высота 3т 5ф 7д; поступаю какъ выше:

2т 4ф 8д . . . . . . . . . 200д.
1т 3ф 0д . . . . . . . . . . 108д.

21600дд
3т 5ф 7д . . . . . . . . . 283д

6112800ддд.

| 6112800 | 1728 |
|---|---|
| 684 | 3537ффф. |

| 3537 | 216 |
|---|---|
| 81 | 16ттт. |

Параллелипипедъ сей заключаетъ 16ттт 81ффф 684ддд.

261. Во второмъ способѣ измѣренія толщины въ кубическихъ тоазахъ и частяхъ кубическаго тоаза, представляется кубической тоазъ раздѣленнымъ на шесть параллелипипедовъ, изъ которыхъ каждый имѣетъ основаніемъ квадратной тоазъ, а высотою футъ, и потому называется *футъ кубическаго тоаза*. Равнымъ образомъ представляется футъ кубическаго тоаза раздѣленнымъ на 12 параллелипипедовъ, коихъ основаніемъ служитъ квадратной тоазъ, а высотою дюймъ, и которые называются *дюймы кубическаго тоаза*. Словомъ, кубической тоазъ представляется дѣлющимся безпрестанно на параллелипипеды, которые вообще всѣ имѣютъ основаніемъ квадратной тоазъ, а высотою или футъ или дюймъ или линѣю или скрупулъ и такъ далѣе, и называются *футъ кубическаго тоаза*, *дюймъ кубическаго тоаза*, *линѣя кубическаго тоаза*, *скрупулъ кубическаго тоаза* и проч.

Что касается до умноженій сего раздѣленія кубическаго тоаза, то они производятся такимъ же образомъ, какъ показано было для раздѣленія квадратнаго тоаза.

Чтожъ принадлежитъ до свойства единицъ производителей, то одного изъ нихъ

должно принимать изображающимъ кубическіе тоазы, футы кубическаго тоаза, дюймы кубическаго тоаза и проч. а другіе два за числа отвлеченныя, коихъ произведеніе покажетъ, сколько разъ должно повторить перваго производителя.

Но чтобъ производить удобнѣе сіи умноженія, то оставляются въ производителяхъ тѣ же знаки тоаза, какіе они имѣютъ; по окончаніи же дѣйствія должно помнить, что произведеніе будетъ состоять уже изъ кубическихъ тоазовъ, футовъ кубическаго тоаза и проч. Поступая, какъ при измѣреніи площадей, найду толщину слѣдующимъ образомъ.

## ПРИМѢРЪ.

Требуется найти толщину того же параллелипипеда, которой показанъ былъ въ предыдущемъ примѣрѣ, по сему второму способу исчисленія.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 2 Т | 4 Ф | 8 д. | |
| | 1 Т | 3 Ф | | |
| | 2 | 4 | 8 | |
| За 3 Ф . . | 1 | 2 | 4 | |
| | 4 ТТ | 1 ТФ | 0 ТД. | |
| | 3 Т | 5 Ф | 7 д. | |
| | 12 | 3 | 0 | |
| За 3 Ф . | 2 | 0 | 6 | |
| За 2 Ф . | 1 | 2 | 4 | |
| За 6 д . | 0 | 2 | 1 | |
| За 1 д . | 0 | 0 | 4 | 2 |
| Толщина . | 16 ТТТ | 2 ТТФ | 3 ТТД | 2 ТТл. |

262. По исчислении толщины вѣ такихѣ частяхѣ тоаза не трудно превратить ихѣ и вѣ кубуческие, то есть вѣ кубические футы, вѣ кубические дюймы и проч. Надлежитѣ написать рядомѣ подѣ частями тоаза, начавѣ сѣ футовѣ кубическаго тоаза, числа 36, 3, $\frac{1}{4}$, 36, 3, $\frac{1}{4}$, и помноживѣ каждое верхнее число на соотвѣтствующее ему нижнее, ставить произведенія чиселѣ 36, 3, $\frac{1}{4}$, вѣ одинѣ столпецѣ сѣ первымѣ; когдаже по умножении на $\frac{1}{4}$ случится вѣ остаткѣ 1 или 2 или 3, тогда писать подѣ вторымѣ числомѣ 36 числа 432 или 864 или 1296, и составлять тѣмѣ же порядкомѣ сей другой столпецѣ. Приноровивѣ сіе кѣ предыдущему примѣру:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 16 ТТТ | 2 ТТф | 3 ТТд | 2 ТТл | 0 ТТс. |
| | 36 | 3 | $\frac{1}{4}$ | 36. |
| 16 ТТТ | 72 ффф | . . | . . | 864 ддд. |
| | 9 | | | |
| 16 ТТТ | 81 ффф | 864 ддд. | | |

Найдемѣ тоже произведеніе, какѣ вѣ первомѣ случаѣ.

Умножаются футы кубическаго тоаза на 36 для того, что футѣ кубическаго тоаза, имѣя основаніемѣ квадратной тоазѣ, а высотою футѣ, долженѣ заключать вѣ себѣ 36 кубическихѣ футовѣ. Дюймѣ кубическаго тоаза будучи 12 тая часть фута кубическаго тоаза, долженѣ состоять изѣ 12 той части 36 ти кубическихѣ футовѣ, то есть изѣ 3 кубическихѣ футовѣ, и потому дюй-

мы кубическаго тоаза слѣдуетъ помножить на 3 Равнымъ образомъ линѣя кубическаго тоаза будучи 12 тая часть дюйма кубическаго тоаза, должна заключать въ себѣ 12 тую часть 3 кубическихъ футовъ, или четверть кубическаго фута, или (какъ кубической футъ равенъ 1728 кубическимъ дюймамъ) должна она состоять изъ 432 ддд. Разсуждая такимъ образомъ увѣримся, что скрупулъ кубическаго тоаза будетъ состоять изъ 36 кубическихъ дюймовъ, потому что онъ есть 12 тая часть линѣи кубическаго тоаза, а сія послѣдняя равна 432 кубическимъ дюймамъ, которыхъ двенадцатая часть есть 36; слѣдовательно и проч.

263. И обратно, чтобъ привести кубическія части кубическаго тоаза въ футы кубическаго тоаза, въ дюймы кубическаго тоаза и проч. надлежитъ раздѣлить число кубическихъ футовъ на 36, и частное почитать за футы кубическаго тоаза: остатокъ, ежели случится послѣ сего дѣленія, раздѣлить на 3, чрезъ что получишь дюймы кубическаго тоаза. Остатокъ послѣ сего другаго дѣленія умножъ на 4 и къ произведенію прибавь 1 или 2 или 3, глядя по числу кубическихъ дюймовъ, ежели оно будетъ заключаться между 432 и 864, или между 864 и 1296, или между 1296 и 1728, отъ чего получишь линѣи кубическаго тоаза; на послѣдокъ выключивши изъ числа кубическихъ дюймовъ число 432 или 864 или 1296, судя потому сколько прибавлено было единицъ 1 или 2 или 3, по-

ступай съ остаткомъ также, какъ съ кубическими футами, и получишь по порядку скрупулы кубическаго тоаза, первые кубическаго тоаза, вторые кубическаго тоаза; наконецъ производи такимъ же образомъ дѣйствіе съ кубическими линѣями и проч.

На примѣръ желая привести въ футы кубическаго тоаза, въ дюймы кубическаго тоаза и проч. число 47ТТТ 52ффф 932ддд, дѣлю 52 на 36, въ частномъ получаю 1ТТф въ остаткѣ 16; дѣлю сей остатокъ на 3, въ частномъ нахожу 5ТТд, въ остаткѣ 1; множу 1 на 4 и къ произведенію прибавляю 2 единицы, потому что число кубическихъ дюймовъ заключается между 864 и 1296, и получаю 6ТТл: отнявши 864 изъ 932, въ остаткѣ выходитъ 68; дѣлю 68 на 36, и получаю 1ТТс и 32 въ остаткѣ; дѣлю 32 на 3, въ частномъ выходитъ 10ТТ′ въ остаткѣ 2; множу сей остатокъ на 4 и получаю 8ТТ″, такъ что всего будетъ 47ТТТ 1ТТф 5ТТд 6ТТл 1ТТс 10ТТ′ 8ТТ″.

264. Ежели же не относя толщины къ кубическому тоазу, пожелаешь представить ее въ частяхъ кубическаго фута, то можно такимъ же образомъ, вообразивъ кубической футъ составленнымъ изъ 12 параллелипипедовъ, изъ коихъ всѣ будутъ имѣть квадратной футъ основаніемъ, а дюймъ высотою, означить сіи параллелипипеды такъ *ффд*, для показанія того, что они суть *дюймы кубическаго фута*. Для употребленія сего представляемъ слѣдующій примѣръ.

**ПРИМѢРЪ** *для исчисленія толщины понтона.*

Пусть будетъ (*фиг.* 133) самая большая ширина

| | | |
|---|---|---|
| EH . . . . . . . . . . . . . . . . | 4ф | 4д. |
| Меньшая FG . . . . . . . . . . . | 4 | 2. |
| Растояніе ихъ, или пустота понтона | 2 | 4. |
| Самая большая длина AI . . . . . . | 18 | 0. |
| Меньшая CL . . . . . . . . . . . | 13 | 4. |
| И такъ 2 AI + CL . . . . . . . . . | 49 | 4. |
| и 2 CL + AI . . . . . . . . . . . | 44 | 8. |

Вычисляю площади треугольниковъ EHG и EFG, имѣющихъ общею высотою пустоту понтона, и нахожу какъ слѣдуетъ.

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 4ф | 4д | |
| | 2 | 4 | |
| | 8 | 8 | |
| за 4д . . . . | 1 | 5 | 4 |
| Сумма . . . | 10 | 1 | 4 |

Половина суммы 5фф 0фд 8фл Тр. EHG.

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 4 | 2 | |
| | 2 | 4 | |
| | 8 | 4 | |
| за 4д . . . . | 1 | 4 | 8 |
| Сумма . . . . | 9 | 8 | 8 |

Половина сум. 4фф 10фд 4фл Тр. EFG.

Умноживъ первую площадь на 2 AI + CL, а вторую на 2 CL + AI, возму изъ всего треть, что представитъ толщину понтона.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 5фф | 0фд | 8фл | |
| | 49 | 4 | | |
| | 247 | 8 | 8 | |
| за 4д. | 1 | 8 | 2 | 8 |
| сум. | 249ффф | 4ффд | 10ффл | 8ффс |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 4фф | 10фд | 4фл | |
| | 44 | 8 | | |
| | 213 | 10 | 8 | |
| за 6д. | 2 | 5 | 2 | |
| за 2д. | 0 | 9 | 8 | 8 |
| сум. | 217ффф | 1ффд | 6ффл | 8ффс. |

Сложивши обѣ суммы сіи, и взявши изъ всего треть, получаю 155ффф 6ффд 1ффл 9ффс 4фф′ за толщину понтона.

**ПРИМѢРЪ** *для измѣренія толщины батареи.*

Дабы сдѣлать еще приноровку изъ измѣренія толщинъ въ тоазахъ къ усѣченнымъ призмамъ, то пусть требуется найти количество земли, ну-

жное къ построенію эполемента батареи о четырехъ пушкахъ.

Положимъ, что длина въ основаніи такой батареи дана 13Т 2ф. Высота эполемента внутри обыкновенно бываетъ 1Т 1ф, а снаружи 1Т оф 4д. Внутренній скатъ состоя изъ трети внутренней высоты, а наружный изъ половины наружной высоты, первой долженъ равняться 2ф 4д, а второй 3ф 2д; ширина основанія 3Т 5ф 6д, почему ширина наружнаго верху эполемента должна быть 3Т оф од. Предполагается съ обѣихъ сторонъ эполемента одинакой скатъ съ внутреннимъ, то есть треть внутренной высоты сзади и треть наружной высоты спереди; такимъ образомъ внутренняя длина эполемента къ верху будетъ 12Т 3ф 4д, а наружная къ верху 12Т 3ф 9д 4л.

Опредѣливши протяженія сіи, можно почитать толстоту батареи (сдѣлавъ исключеніе амбразурамъ) за усѣченную призму, въ которой перпендикулярное къ длинѣ сѣченіе представитъ трапецію EFGH (*фиг.* 134), и которой

| | | | |
|---|---|---|---|
| Основаніе HE будетъ . . . . . | 3Т | 5ф | 6д |
| Внутренній скатъ HK . . . . . | о | 2 | 4 |
| Высота GK отъ угла G . . . . | 1 | 1 | о |
| Наружной скатъ IE . . . . . . | о | 3 | 2 |
| Высота IF отъ угла F . . . . | 1 | о | 4. |

По томъ вообразивъ, что сѣченіе сдѣлано по серединѣ длины, отъ чего цѣлая призма раздѣлится на двѣ другія прямыя усѣченныя, совершенно между собою равныя, и изъ которыхъ каждая будетъ имѣть основаніемъ трапецію EFGH; представь наконецъ себѣ діагональ GE, то по объявленному (254) толщина одной половины выдетъ, когда треугольникъ EFG умножится на $\frac{1}{3}$ суммы трехъ боковъ, соотвѣтствующихъ съ той стороны призмы угламъ F, E, G, и къ произведенію сему прибавится произведеніе треугольника EGH, помноженнаго такимъ же образомъ на $\frac{1}{3}$ трехъ боковъ простирающихся отъ угловъ E, G, H; напослѣдокъ удвоивъ сію сумму, получишь толщину всей призмы. А какъ сіи бока суть половины длинъ, которыя со-

отвѣтствуютъ тѣмъ угламъ, или суть бока цѣлой призмы, то явствуетъ, что дѣйствїе совершено быть можетъ также помноженїемъ треугольника EFG на треть суммы трехъ цѣлыхъ боковъ, простирающихся чрезъ углы E, F, G, и треугольника EGH на треть суммы трехъ боковъ, которые продолжаются чрезъ углы E, G, H, и сложенїемъ сихъ двухъ произведенїй.

Но бока сїи относительно къ угламъ суть слѣдующїе:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Бока | при E | 13 T | 2 ф | 0 д | 0 л. | |
| | при G | 12 | 3 | 4 | 0. | |
| | при F | 12 | 3 | 9 | 4. | |
| | при H | 13 | 2 | 0 | 0. | |
| Треть трехъ боковъ при E, F G будетъ | | 12 T | 5 ф | 0 д | 5 л | 4 с |
| Треть трехъ боковъ при E, G, H, будетъ | | 13 T | 0 ф | 5 д | 4 л | |

Теперь стоитъ только найти площади треугольниковъ EFG и EGH; но площадь втораго неоспоримо должна равна быть $\frac{HE \times GK}{2}$, а перваго разности между четвероугольникомъ EFGH и треугольникомъ EGH, то есть $EK \times \frac{1}{2} FI - EI \times \frac{1}{2} GK$; и такъ по даннымъ мѣрамъ сыщется, какъ слѣдуетъ.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Треугольникъ EGH . . . | 2 TT | 1 Tф | 8 Tд | 6 Tл | 0 Tс. |
| $EK \times \frac{1}{2} FI$ . . . . . | 1 | 5 | 2 | 0 | 8 |
| $EI \times \frac{1}{2} GK$ . . . . . | 0 | 1 | 10 | 2 | 0 |
| Треугольникъ EFG | 1 | 3 | 3 | 10 | 8 |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Почему призьма, соотвѣтствующая треугольнику EGH будетъ . . . . | 29 TTT | 5 TTф | 2 TTд | 8 TTл | 2 TTс | 8 TT' |
| А призьма, соотвѣтствующая треугольнику FGE . | 19. | 5. | 8. | 7. | 2. | 1. |
| Толщина батареи . . . . | 49 TTT | 4 TTф | 11 TTд | 5 TTл | 4 TTс | 9 TT' |

Чтожъ касается до амбразуръ, то предположивъ, что основанïе ихъ горизонтально, что внутреннее отверстïе сверху и снизу равно 2ф, наружное 9ф внизу, а 12ф 6д вверху, что высота амбразуры съ внутренней стороны батареи 3ф 6д; когда вообразимъ каждую амбразуру перпендикулярно разсѣченною къ длинѣ батареи, то увидимъ, что профиль ея можетъ изобразиться четвероугольникомъ FGDM (*фиг.* 134), въ которомъ GO будетъ 3ф 6д, FN 2ф 10д, а скаты DO 1ф 2д, NM 1ф 5д; послѣ чего DM найдется 3Т 2ф 7д; а какъ амбразура представляетъ также усѣченную призьму, которой протяженïя теперь всѣ уже извѣстны, то посредствомъ предыдущаго исчисленïя найдется толщина четырехъ амбразуръ 6ТТТ 3ТТф 1ТТд 6ТТл 3ТТс 1ТТ'. И такъ выключивши сïю толщину изъ вышенайденной толщины батареи, въ остаткѣ получишь 43ТТТ 1ТТф 9ТТд 9ТТл 1ТТс 8ТТ' за то количество земли, которое нужно на построенïе эполемента; послѣ чего не трудно также заключить и о числѣ работниковъ, кои нужны для построенïя сей батареи въ опредѣленное время, знавши опытомъ, что три человѣка безъ обремененïя себя могутъ вырыть и вывезти на батарею одинъ кубической тоазъ земли въ 18 часовъ.

265. Поелику для сысканïя толщины въ призмѣ, надлежитъ умножить площадь основанïя ея на высоту; то слѣдуетъ, что знавши толщину и основанïе или высоту, ежели потребуется найти высоту или основанïе, должно раздѣлить толщину на котораго нибудь изъ тѣхъ двухъ производителей; впрочемъ надлежитъ примѣчать, что въ самой вещи толщина не дѣлится на площадь или высоту, но что она дѣлится на толщину же; ибо изъ прежде сказаннаго понять можно, что при исчисленïи какой нибудь

толщины повторяется другая толщина одинакаго съ первою основанія столько разъ, сколько высота сей послѣдней содержится въ высотѣ первой, или повторяется другая толщина одинакой высоты столько разъ, сколько площадь основанія сей содержится въ основаніи той. И такъ, знавши толщину и площадь основанія, когда пожелаешь найти напримѣръ высоту, надлежитъ сыскать сколько разъ данная толщина содержитъ въ себѣ другую толщину одного съ нею основанія, но коей высота будетъ единица; частное означитъ числомъ своихъ единицъ число частей высоты.

Предположивъ сіе, ежели въ призмѣ, коей на примѣръ толщина дана 16 ТТТ 2 ТТф 3 ТТд 2 ТТл, а площадь основанія 12 ТТ о Тф о Тд, потребуется узнать высоту; то принявъ дѣлителя не за 12 ТТ о Тф о Тд, но за 12 ТТТ о ТТф о ТТд, вопросъ рѣшится раздѣленіемъ 16 ТТТ 2 ТТф 3 ТТд 2 ТТл на 12 ТТТ о ТТф о ТТд; а какъ квадратной тоазъ есть общій производитель, то частное произойдетъ такое же, какъ бы дѣлимое и дѣлитель означали линѣйные тоазы; слѣдовательно должно дѣлить просто 16 Т 2 ф 3 д 2 л на 12 Т о ф о д, то есть на 12 Т; притомъ же сила вопроса показываетъ, что частное должно состоять изъ линѣйныхъ тоазовъ, и для того дѣйствіе дѣленія совершится по предписаннымъ правиламъ (Ариѳ. 118. и слѣд.).

Ежели толщина и высота будутъ даны, и потребуется сыскать площадь основанія, на примѣръ толщина была бы 16 ТТТ 2 ТТф 3 ТТд 2 ТТл, а высота 2 Т 4 ф 8 д; то принявъ дѣлителя за 2 ТТТ 4 ТТф 8 ТТд, и по той же причинѣ, какъ въ

предыдущемъ случаѣ дѣйствïе произведено будетъ раздѣленïемъ 16 Т 2 ф 3 д 2 л на 2 Т 4 ф 8 д; но какъ въ частномъ непремѣнно должна выйти площадь, того ради частное сïе почитать не за линѣйные уже тоазы, но за квадратные тоазы, тоазы футы и проч. Впрочемъ способъ производства дѣйствïя остается тотъ же въ силу показанныхъ правилъ (Ариѳ. 118. и слѣд.) съ тою только перемѣною, что въ частномъ, которое выходитъ такое, какъ бы оно должно изображать линѣйные тоазы, прибавить должно къ знаку каждой части букву Т. На примѣръ сыскавши частное 5 Т 5 ф 4 д 6 л, напишу его 5 ТТ 5 Тф 4 Тд 6 Тл.

266. Когда толщина и основанïе или высота будутъ даны въ саженяхъ, и потребуется найти высоту или основанïе; въ такомъ случаѣ для высоты надлежитъ привести кубическую мѣру толщины въ самой малѣйшïй сортъ, на пр. въ кубическïе дюймы, кубическïя линѣи и проч. а площадь основанïя въ такой же сортъ квадратной мѣры; по томъ раздѣлить толщину на площадь основанïя, и частное щитать за высоту въ линѣйной мѣрѣ того же самаго сорта.

Напримѣръ положивъ, что толщина параллелипипеда дана 257 ссс 88 ффф 564 ддд, а площадь основанïя его 24 сс 45 фф 44 дд, найду высоту сего тѣла поступая такъ:

257 ссс 88 ффф 564 ддд . . . . 152477556 ддд.
24 сс 45 фф 44 дд . . . . . . . . 175868 дд.

И принявъ оба сïи количества за линѣйные дюймы, дѣлю обыкновеннымъ порядкомъ:

152477556 | 175868
867 д

Такимъ образомъ нахожу высотою даннаго тѣла 867 д, или по приведенiи 10 с 2 ф 3 д.

Для сысканiя же площади основанiя, когда будутъ даны толщина и высота тѣла, надлежитъ привести кубическую мѣру толщины въ малѣйшiй сортъ кубической мѣры, и линѣйную мѣру высоты въ такой же сортъ; по томъ раздѣлить мѣру толщины на мѣру высоты, и частное почитать за квадратную мѣру площади основанiя.

На примѣръ знавши, что толщина предыдущаго тѣла есть 257 ссс 88 ффф 564 ддд, а высота 10 с 2 ф 3 д, нахожу площадь основанiя такъ:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 257 ссс | 88 ффф | 564 ддд | . . . . . | 152477556 ддд |
| 10 с | 2 ф | 3 д | . . . . . . . . . | 867 д |

152477556 | 867 — 175868 дд.

Площадь основанiя будетъ 175868 дд, или по приведенiи 24 сс 45 фф 44 дд.

## *О Содержанiи Тѣлъ вообще.*

267. Сравнивать два тѣла, значитъ искать, сколько разъ число мѣръ извѣстнаго рода, содержащихся въ одномъ изъ тѣлъ тѣхъ, содержится въ числѣ мѣръ того же рода, заключающихся въ другомъ.

268. *Двѣ призмы или два цилиндра, или призма и цилиндръ содержатся между собою, какъ произведенiя основанiй ихъ на высоты.* Сiе доказы-

ваетъ то, что каждое изъ сихъ тѣлъ равно произведенію основанія своего на высоту, какой бы впрочемъ фигуры не было основаніе его.

*И такъ призмы или цилиндры, или призмы и цилиндры одной высоты содержатся между собою, какъ ихъ основанія; но призмы и цилиндры одного основанія содержатся, какъ ихъ высоты*; ибо содержаніе не перемѣнится, естьли въ произведеніяхъ основаній на высоты опустится общій множитель.

Равнымъ образомъ *двѣ какія нибудь пирамиды или два конуса, или пирамида и конусъ одинакаго основанія будутъ содержаться между собою, какъ ихъ высоты*; потому что они суть трети призмъ одного съ ними основанія и одной высоты.

269. *Толщины подобныхъ пирамидъ содержатся между собою, какъ кубы высотъ сихъ пирамидъ, или вообще какъ кубы сходственныхъ боковъ ихъ.*

Двѣ подобныя пирамиды представлены быть могутъ двумя сими IABCDF, I*abcdf* (*фиг.* 108), потому что онѣ состоятъ изъ одно-

то числа подобныхъ сторонъ и сходственно расположенныхъ. Но пирамиды вообще содержатся, какъ произведенія основаній ихъ на высоты; основанія же у сихъ будучи фигуры подобныя, находятся между собою, какъ квадраты высотъ IP, Ip (202); почему пирамиды сіи будутъ содержаться, какъ произведенія квадратовъ высотъ на тѣ же высоты, понеже (99) за содержаніе оснований можно принять содержаніе квадратовъ высотъ. А какъ (199) высоты суть пропорціональны всѣмъ прочимъ сходственнымъ протяженіямъ, то и кубы ихъ будутъ пропорціональны также кубамъ тѣхъ сходственныхъ протяженій (Ариѳ. 181). И такъ явствуетъ, что вообще двѣ подобныя пирамиды содержатся между собою, какъ кубы ихъ сходственныхъ протяженій.

270. И вообще *толщины двухъ подобныхъ тѣлъ содержатся между собою, какъ кубы сходственныхъ боковъ тѣхъ тѣлъ.* Понеже подобныя тѣла могутъ раздѣлены быть на равное число подобныхъ между собою пирамидъ; а какъ каждыя двѣ изъ тѣхъ подобныхъ пирамидъ находятся въ одинакомъ содержаніи, потому что онѣ будутъ между собою, какъ кубы ихъ сходственныхъ протяженій, а сіи

будутъ въ томъ же содержаніи, какъ два другія сходственныя протяженія; то слѣдуетъ, что и сумма пирамидъ перваго тѣла къ суммѣ пирамидъ другаго содержится точно такъ, какъ кубы сходственныхъ ихъ протяженій.

Наконецъ заключимъ изъ сего, что и *толщины шаровъ будутъ находиться между собою, какъ кубы ихъ полупоперешниковъ или поперешниковъ.*

Сіи правила могутъ служить способомъ къ рѣшенію вопросовъ слѣдующаго свойства.

1 е. *Знавши вѣсъ кубическаго фута пороху, найти бокъ кубической камеры, долженствующей помѣстить въ себѣ данной вѣсъ пороху.*

Тяжести разныхъ величинъ одного рода вещества будучи пропорціональны величинамъ, будутъ также пропорціональны и кубамъ протяженій ихъ, когда величины тѣ подобны.

Такимъ образомъ положивъ, что кубической футъ пороха вѣситъ 64 фунта, когда потребуется узнать бокъ кубической пороховой камеры, содержащей 10 фунтовъ пороху, посылай сію пропорцію 64 : 10, какъ кубъ 1 къ четвертому пропорціональному члену, которой будетъ кубъ искомаго бока; слѣд. онъ будетъ $\frac{10}{64}$, кубической его корень $\frac{2,154}{4}$, или оф, 538, или оф 6д 5л желаемый бокъ.

2 е. *По извѣстному вѣсу двухъ ядеръ и діаметру одного, сыщется діаметръ другаго слѣдующимъ образомъ.*

На примѣръ діаметръ 24 фунтоваго ядра данъ 5д 5л 4с или 5д, 444; требуется знать діаметръ 12 фунтоваго ядра.

Понеже толщины должны содержаться = 24 : 12 или 2 : 1; слѣд. и кубы діаметровъ должны быть также = 2 : 1; такимъ образомъ изъ утроеннаго логариѳма 5,444 вычитаю логариѳмъ 2хъ, и получаю 1,906724, котораго треть 0,635575 пріисканная съ хар ктеристикою, увеличенною 3 единицами будетъ отвѣчать 4321; слѣд. искомый діаметръ равенъ 4д, 321 или 4д 3л 1ос.

Помощію сихъ же правилъ можно рѣшить и слѣдующіе два вопроса; но доказанное предложеніе (246) сопровождаетъ насъ къ легчайшему рѣшенію, и именно: *найти діаметръ шара, когда дана толщина его 10 кубическихъ футовъ.*

Посылай 11 : 21 = 10 къ четвертому пропорціональному члену, которой будетъ кубъ требуемаго діаметра; и извлекши кубическій корень, получишь просто діаметръ. Производя дѣйствіе въ логариѳмахъ, сыщется такимъ образомъ:

| | |
|---|---|
| Лог. 10 . . . . . . . . . . | 1,000000 |
| Лог. 21 . . . . . . . . . . | 1,322219 |
| Сумма . . . . . . . | 2,322219 |
| Лог. 11 . . . . . . . . . . | 1,041393 |
| Разность . . . . . . . | 1,280826 |
| коего треть . . . . . . . . . | 0,426942. |

пріисканная съ характеристикою, увеличенною тремя единицами, отвѣчаетъ 2ф, 673 или 2ф 8д ол 11с желаемому діаметру.

Симъ же способомъ можно *опредѣлить діаметръ свинцовыхъ пуль по числу ихъ на фунтъ.*

На примѣръ знавши, что кубической футъ свинцу вѣситъ 828 фунтовъ, желаю найти діаметръ пули такой, какихъ находится 16 въ фунтѣ.

Когда 16 пуль находится въ фунтѣ, то 16 разъ 828 или 13248 будетъ содержаться ихъ въ кубическомъ футѣ, и слѣд толщина каждой будетъ $\frac{1}{13248}$ часть кубическаго фута.

И такъ посылаю сїю пропорцїю $11 : 21 = \frac{1}{13248}$ къ четвертому члену, то есть къ кубу желаемаго дїаметра; или приведя кубической футъ въ кубическїя линѣи, дѣлаю посылку $11 : 21 = \frac{1728 \times 1728}{16 \times 828}$ къ четвертому члену $\frac{1728 \times 1728 \times 21}{16 \times 828 \times 11}$.

Производя въ логариѳмахъ . . . . . .

| | |
|---|---|
| Лог. 16 . . . 1,204120. | Лог. $\overline{1728}^{2}$ . . . . . . . 6,475088 |
| Лог. 828 . . . 2,918030. | Лог. 21 . . . . . . . . . 1,322219 |
| Лог. 11 . . . 1,041393 | Сумма . . . . . 7,797307 |
| Сумма . . 5,163543. | 5,163543 |
| | Разн. 2хъ суммъ . . 2,633764 |
| | Треть сего . . . . . . 0,877921. |

прїисканная съ характеристикою, увеличенною двумя единицами, отвѣчаетъ 7л, 55 или 7л 6с $\frac{3}{5}$ дїаметру каждой пули.

И такъ припомнивъ все прежде сказанное, явствуетъ 1 е. что окруженїя подобныхъ фигуръ находятся въ простомъ содержанїи сходственныхъ линѣй. 2 е. Что площади подобныхъ фигуръ содержатся, какъ квадраты сходственныхъ боковъ или линѣй. 3 е. Что толщины подобныхъ тѣлъ содержатся, какъ кубы сходственныхъ линѣй.

Почему ежели въ двухъ подобныхъ тѣлахъ, на примѣръ въ двухъ шарахъ, дїаметры были бы въ содержанїи 1 : 3, то окружности большихъ круговъ ихъ будутъ также въ содержанїи 1 : 3; но поверхности

сихъ шаровъ будутъ уже содержаться какъ 1 : 9, а толщины какъ 1 : 27; то есть, что окружность большаго круга втораго шара будетъ въ семъ случаѣ втрое больше окружности большаго круга перваго; поверхность втораго вдевятеро поверхности перваго; напослѣдокъ второй шаръ будетъ равенъ 27 такимъ, каковъ первый.

Понеже поверхности подобныхъ тѣлъ содержатся, какъ квадраты сходственныхъ линѣй; то сходственныя сіи линѣи будутъ между собою какъ квадратные корни изъ тѣхъ поверхностей; а тѣла находясь между собою, какъ кубы сходственныхъ линѣй, будутъ также содержаться, какъ кубы квадратныхъ корней тѣхъ поверхностей. Почему поверхности будутъ содержаться также, какъ квадраты кубическихъ корней тѣлъ.



---

# ПЛОСКАЯ ТРИГОНОМЕТРІЯ.

271. *Тригонометрія плоская* есть часть Геометріи, которая учитъ по даннымъ тремъ изъ шести частей прямолинѣйнаго треугольника опредѣлять или находить три прочія его части, ежели то возможно.

Ежели возможно, говорю я, ибо по извѣстнымъ тремъ угламъ на примѣръ, не можно опредѣлить боковъ. Истина сего явствуетъ изъ того, что изъ какой бы точки P, взятой на боку AB треугольника ABC (*фиг.* 135), въ которомъ положимъ извѣстны будутъ три угла, не была проведена линѣя PE, параллельная съ основаніемъ его AC, всегда произойдетъ другой треугольникъ APE такой, которой будетъ имѣть съ первымъ ABC одинакіе углы; а какъ явствуетъ также, что можно сдѣлать безчисленное множество треугольниковъ, имѣющихъ одинакіе углы, то надлежало бы въ заключеніи рѣшенія произойти вдругъ безчисленному множеству различныхъ боковъ.

И такъ требованіе сіе остается совсѣмъ неопредѣленнымъ. Однакожъ въ послѣд-

ствiи увидимъ, что ежели невозможно опредѣлить величины боковъ, то можно опредѣлить по крайней мѣрѣ содержанiе ихъ между собою.

Когда же между извѣстными или данными частями будетъ находиться бокъ, то можно опредѣлить все прочее. Но и тутъ встрѣчается случай, гдѣ остается нѣчто не определеннымъ, и именно:

Въ треугольникѣ ABC (*фиг.* 135), въ которомъ положимъ извѣстны два бока AB и BC, и уголъ A противоположенный одному изъ тѣхъ боковъ, не можно опредѣлить величины угла C и бока AC до тѣхъ поръ, пока не узнаемъ объ углѣ C какой онъ, тупой или острой; ибо ежели изъ точки B какъ изъ центра опишется радiусомъ, равнымъ боку BC, дуга CD, по томъ отъ точки D, въ которой дуга пересѣкаетъ AC, проведется BD; то отъ сего произойдетъ новый треугольникъ ABD, въ которомъ будетъ извѣстно все тоже, что и въ треугольникѣ ABC, именно уголъ A, бокъ AB и бокъ BD равный BC; почему въ немъ опредѣлить должно тотъ же уголъ BDA, какъ и въ треугольникѣ ABC уголъ C.

Но великая находится разница между симъ и предыдущимъ случаемъ, ибо здѣсь можно назначить величину угла C и угла BDA, какъ мы послѣ то увидимъ, только не можно опредѣлить того, какую именно изъ двухъ величинъ принять должно, и какой фигуры долженъ быть треугольникъ. И такъ сверьхъ трехъ данныхъ частей надобно еще знать объ искомомъ углѣ какой онъ, тупой или острой. Между прочимъ замѣтить здѣсь можемъ также, что оба угла C и BDA, подлежащіе разсужденію, суть дополненіемъ одинъ другаго; понеже BDA служитъ дополненіемъ BDC, а сей равенъ углу C по той причинѣ, что треугольникъ BDC сдѣланъ равнобедренный.

272. Какъ въ выкладкахъ, относящихся до треугольниковъ, употребляются не самые углы, но линѣи, которыя хотя тѣмъ угламъ и не пропорціональны, однакожъ весьма много способствуютъ въ исчисленіяхъ, потому что, какъ увидимъ вскорѣ, онѣ пропорціональны бокамъ треугольниковъ; то за приличное почитаемъ прежде всего дать знать о свойствѣ сихъ линѣй, и показать, какъ онѣ могутъ приняты быть вмѣсто угловъ.

## *О Синусахъ, Косинусахъ, Тангенсахъ, Котангенсахъ, Секансахъ и Косекансахъ.*

273. Перпендикулъ AP (*фиг.* 136), опущенный отъ конца дуги AB на полупоперешникъ BC, проведенный къ другому концу B той дуги, называется *прямой синусъ* или просто *синусъ* дуги AB или угла ACB.

Часть BP полупоперешника, заключающаяся между симъ *синусомъ* и концомъ дуги, именуется *обращенной синусъ.*

Часть BD перпендикуляра, стоящаго на концѣ полупоперешника, содержащаяся между симъ полупоперешникомъ BC и продолженнымъ CA, называется *тангенсъ* дуги AB или угла ACB.

Линѣя CD, продолженный радіусъ CA до тангенса, называется секансъ дуги AB или угла ACB.

Естьли проведется полупоперешникъ CF перпендикулярно къ CB, и изъ конца его F перпендикуляръ FE, пересѣкающій въ точкѣ E продолженный радіусъ CA, напослѣдокъ поставится перпендикуляръ AQ къ CF; то слѣдуетъ изъ предыдущихъ опредѣленій,

что AQ будетЪ синусЪ, FQ синусЪ обращенный, FE тангенсЪ, и CE секансЪ дуги AF или угла ACF.

Но какЪ уголЪ ACF есть дополненіемЪ ACB, понеже оба сіи углы составляютЪ вмѣстѣ прямой, то по сему можно заключить, что AQ есть синусЪ дополненія, FQ синусЪ обращенный дополненія, FE тангенсЪ дополненія; а CE секансЪ дополненія дуги AB или угла ACB.

А чтобЪ сократить наименованія сіи, то по общему всѣхЪ согласію синусЪ дополненія называется *косинусомЪ*, синусЪ обращенный дополненія *обращеннымЪ косинусомЪ*, тангенсЪ дополненія *котангенсомЪ*, секансЪ дополненія *косекансомЪ*. ТакимЪ образомЪ линѣи AQ, FQ, FE, CE будутЪ называться косинусЪ, косинусЪ обращенный, котангенсЪ и косекансЪ дуги AB или угла ACB; и слѣд. линѣи AP, BP, BD и CD могутЪ равно именоваться косинусЪ, косинусЪ обращенный, котангенсЪ, косекансЪ дуги AF или угла ACF; потому что AB служитЪ дополненіемЪ AF также, какЪ AF служитЪ дополненіемЪ AB.

Когда будетЪ итти рѣчь обЪ углѣ или дугѣ, то для означенія упомянутыхЪ

линѣй, къ нимъ принадлежащихъ, поставлять всегда будемъ предъ буквами, служащими къ названію того угла или той дуги, сіи сокращенныя выраженія *син. кос. танг. кот.* и проч. И такъ *син.* AB будетъ означать синусъ дуги AB; *син.* ACB будетъ означать синусъ угла ACB; равнымъ образомъ *кос.* AB, *кос.* ACB будутъ означать косинусъ дуги AB, косинусъ угла ACB; для означенія же полупоперешника употреблять будемъ букву R.

274. Изъ сего явствуетъ 1е. *что косинусъ* AQ *какой нибудь дуги* AB *равенъ части* CP *радіуса, содержащейся между центромъ и синусомъ.*

2е. *Что синусъ обращенной* BP *равенъ разности между полупоперешникомъ и косинусомъ.*

3е. *Что синусъ какой нибудь дуги* BA *равенъ половинѣ хорды* AG *двойной дуги* ABG. Ибо радіусъ CB будучи перпендикуляренъ къ хордѣ AG, раздѣляетъ ее и дугу ея на двѣ равныя части (52).

275. Изъ сего послѣдняго предложенія слѣдуетъ, что *синусъ* 30 *градусовъ равенъ половинѣ радіуса*; потому что онъ

долженъ состоять изъ половины хорды 60 градусовъ, или изъ бока шестiугольника, которой, какъ мы видѣли (93), равенъ радiусу.

276. *Тангенсъ 45 градусовъ равенъ полупоперешнику.* Ибо когда уголъ ACB есть 45 градусовъ, то и уголъ CDB будетъ 45 градусовъ, потому что уголъ CBD есть прямой; почему треугольникъ CBD будетъ равнобедренной, и слѣд. BD будетъ равно CB.

277. По мѣрѣ какъ дуга AB или уголъ ACB увеличиваются, синусъ AP увеличивается также, но косинусъ AQ или CP уменьшается до тѣхъ поръ, пока дуга AB сдѣлается 90 градусовъ; тогда синусъ AP превращается въ FC, то есть, становится равенъ радiусу, а косинусъ нолю, потому что когда точка A упадаетъ въ F, перпендикуляръ AQ совсѣмъ уничтожается.

Чтожъ касается до тангенса BD и котангенса FE, то легко видѣть можно, что тангенсъ увеличивается безпрестанно, а котангенсъ напротивъ того уменьшается, такимъ при томъ образомъ, что когда дуга AB сдѣлается 90 градусовъ, тангенсъ ея становится безконечнымъ, а котангенсъ со-

всѣмъ уничтожается; ибо чѣмъ больше дуга AB увеличивается, тѣмъ далѣе точка D отходитъ отъ CB; когда же A будетъ въ безконечно маломъ разстояніи отъ F, тогда обѣ линѣи CD и BD становятся почти параллельными, и пересѣкаются въ безпредѣльномъ растояніи; изъ сего слѣдуетъ, что BD будетъ безконечна, когда точка A упадетъ въ точку F.

278. И такъ *для дуги 90 градусовъ синусъ долженъ быть равенъ полупоперешнику, косинусъ нолю, тангенсъ есть безпредѣльный, а котангенсъ равенъ нолю.*

Какъ синусъ 90 градусовъ есть самый большой изъ всѣхъ синусовъ, то называется для отличности отъ другихъ *цѣлый синусъ*; такимъ образомъ троякое званіе сіе: *синусъ 90 градусовъ*, *полупоперешникъ и синусъ цѣлый* означаютъ одно и тоже.

279. Когда дуга AB превосходитъ 90 градусовъ (*фиг.* 137), въ такомъ случаѣ синусъ ея AP уменьшается, а косинусъ AQ или CP, упадающій по другую сторону центра относительно къ точкѣ B, увеличивается до тѣхъ поръ, пока дуга AB сдѣлается 180 градусовъ, и тогда синусъ

уничтожается; а косинусъ становится равенъ полупоперешнику. Явствуетъ также, что синусъ AP и косинусъ CP дуги AB или угла ACB больше, нежели 90 градусовъ, принадлежитъ также и дугѣ AH или углу ACH меньше 90 градусовъ, и которой служитъ дополненіемъ предыдущему; такъ что *за синусъ и косинусъ тупаго угла принимается синусъ и косинусъ его дополненія*. Но надлежитъ твердо помнить, что косинусъ принимаетъ противное положеніе тому, какое бы онъ имѣлъ въ дугѣ, или углѣ меньше 90 градусовъ.

Чтожъ касается до тангенса, то, какъ онъ опредѣляется (273) пересѣченіемъ перпендикуляра BD (*фиг.* 136) продолженнымъ радіусомъ CA, явствуетъ, что въ дугѣ AB (*фиг.* 137) больше 90 градусовъ, онъ долженъ быть тотъ же BD; ибо поставивши перпендикуляръ HI, легко видѣть можно, что треугольникъ CBD равенъ треугольнику CHI и слѣд. BD равенъ HI.

280. *Итакъ тангенсъ дуги или угла больше 90 градусовъ есть тотъ же самой, какой служитъ дополненію той дуги*; съ сею только разностію, что онъ проводится по другую сторону радіуса BC. Котангенсъ EF будетъ также одинаковъ съ

котангенсомъ дополненія, различествуя съ нимъ тѣмъ только, что принимаетъ противное положеніе въ дугѣ AB или углѣ ACB меньше 90 градусовъ. Здѣсь явствуетъ еще по выше упомянутой причинѣ, что тангенсъ 180 градусовъ уничтожается, а котангенсъ становится безконечнымъ.

*О Таблицахъ Синусовъ, Тангенсовъ и проч.*

281. Вообразимъ себѣ, что четверть окружности BF (*фиг.* 1:6) была бы раздѣлена на дуги 1′, то есть на 5400 равныхъ частей, и отъ каждой точки раздѣленія опущены перпендикуляры или синусы такіе на пр. какъ AP на радіусъ БС; представимъ также, что и радіусъ сей BC раздѣленъ на весьма великое число равныхъ частей на пр. на 100000; изъ сего слѣдуетъ, что каждый перпендикуляръ долженъ содержать нѣкоторое число частей радіуса. По томъ ежели бы какимъ нибудь образомъ нашли средство опредѣлить число частей каждаго перпендикуляра, то безъ всякаго сумнѣнія можно было бы для означенія величины угловъ употреблять сіи линѣи, такъ что, ежели бы написавъ по порядку въ столпцѣ всѣ минуты, начиная отъ нуля до 90 градусовъ, приписано было также въ столпцѣ по сторону противъ каждой минуты число частей

соотвѣтствующаго перпендикуляра, можно было бы посредствомъ сей таблицы опредѣлить число градусовъ каждаго угла, коего число частей перпендикуляра или синуса извѣстно; и обратно, знавши число градусовъ и частей градуса всякаго угла, можно было бы опредѣлить число частей синуса его. Сія таблица имѣла бы свою пользу не только для всѣхъ дугъ или угловъ, которыхъ радіусъ содержитъ равное число частей тому, какое мы положили для полупоперешника, по которому сочинены таблицы; но и для всякой другой, которой только радіусъ будетъ извѣстенъ; на пр. положимъ, что въ углѣ DCG (*фиг.* 143) бокъ или радіусъ CD данъ 8 футовъ, а перпендикуляръ DE 3 футовъ, и представимъ, что CA былъ бы радіусъ, по которому сочинены таблицы; то вообразивъ дугу AB и перпендикуляръ AP, сей перпендикуляръ будетъ синусъ таблицъ; но легко узнать можно, какого числа частей будетъ сей перпендикуляръ, ибо въ подобныхъ треугольникахъ CDE, CAP (по причинѣ параллельныхъ DE и AP) посылаю CD : DE = CA : AP, то есть, 8 Ф: 3 Ф = 100000 : AP; нахожу (Ариѳ 166) AP 37500; теперь стоитъ только пріискать число сіе въ таблицахъ, и стоящее подлѣ сего числа по сторону другое покажетъ,

скольких градусов и минут будет угол DCG или DCE.

И обратно, ежели дано будет число градусов и минут угла DCG и радіус его CD, тѣм же способом опредѣлится величина перпендикуляра DE; ибо знавши число градусов и минут сего угла, найди число частей перпендикуляра или синуса AP, соотвѣтствующаго тому числу градусов; и тогда в силу подобных треугольников CAP, CDE, посылай сію пропорцію CA : AP = CD : DE; получишь DE, понеже три первые члена CA, AP, CD извѣстны, и именно CA и AP по таблицам, а CD дано в футах.

По сему явствует, что линѣи, которыя, как сказали мы выше (272), можно принимать вмѣсто углов, суть ничто иное, как синусы.

282. Не одни однакож синусы только, но и тангенсы и самые даже секансы употребляются. Сіи послѣднія линѣи удобно сыскиваются, ежели будут найдены всѣ синусы; ибо в подобных треугольниках CPA, CBD можно вывести слѣдующія двѣ пропорціи:

$$CP : PA = CB : BD$$

и $CP : CA = CB : CD$

то есть (замѣтивъ что CP равно AQ)

*кос.* AB : *син.* AB = R : *танг.* AB.

и *кос.* AB : R = R : *сек.* AB.

Но явствуетъ, что въ каждой изъ сихъ двухъ пропорцій три первые члена извѣстны, понеже косинусъ дуги тоже самое, что и синусъ дополненія ея; почему легко найдется величина тангенсовъ и секансовъ, а по томъ котангенсовъ и косекансовъ, кои не иное что суть, какъ тангенсы и секансы дополненія.

Книги, содержащія величины всѣхъ сихъ линѣй, о которыхъ мы теперь разсуждали, называются таблицами синусовъ; онѣ не только что содержатъ числа величинъ всѣхъ линѣй, но и логариѳмы ихъ, которые весьма часто поставляются также на мѣсто первыхъ. И такъ обратимъ вниманіе на правила, по которымъ таблицы сіи сочинены.

283. *Дабы сыскать косинусъ дуги, коей синусъ извѣстенъ, надлежитъ вычесть квадратъ сего синуса изъ квадрата полупоперешника, и изъ остатка извлечь квадратной корень.* Ибо косинусъ

AQ (*фиг.* 136) равенъ PC, а какъ PC служитъ бокомъ прямоугольнаго треугольника APC, почему по извѣстной гипотенузѣ AC и боку AP, найдется (165) PC или AQ

На примѣръ ежели бы потребовалось узнать косинусъ 30 градусовъ; то, какъ мы видѣли (275), что синусъ сей дуги равенъ половинѣ радіуса, которой, положимъ, состоять будетъ здѣсь изъ 100000 равныхъ частей, синусъ сей будетъ 50000; а отнявши квадратъ его 2500000000 изъ квадрата 10000 00000 радіуса, получишь въ остаткѣ 7500000000, коего квадратной корень 86603 покажетъ косинусъ 30 градусовъ, или синусъ 60 градусовъ.

284. *По извѣстному синусу дуги* AB *требуется сыскать синусъ половины ея.* Сыщи сначала косинусъ CP данной дуги, вычти его изъ радіуса; остатокъ покажетъ обращенной синусъ BP: сдѣлай квадратъ изъ величины BP и придай его къ квадрату синуса AP; сумма (164) будетъ квадратъ хорды AB; напослѣдокъ извлеки квадратной корень изъ сей суммы, получишь прямо AB, которой половина будетъ синусъ BI дуги BD половины AB (274).

285. *Данъ синусъ* BI *дуги* BA (фиг. 139), *требуется найти синусъ* DP *двойной дуги* DAB Сыщи косинусъ CI дуги BA и посылай сію пропорцію R : *кос.* BA = 2 *син.* BA : *син.* BAD, въ которой по тремъ извѣстнымъ первымъ членамъ найдется удобно и четвертый.

Пропорція сія основывается на подобіи треугольниковъ CBI и BDP; ибо сверьхъ того, что они имѣютъ по прямому углу въ P и I, уголъ B будетъ имъ обоимъ общій; почему CB : CI = DB : DP. Но CI (273) есть косинусъ дуги BA, а DB равенъ двойному BI синусу дуги BA; DP есть синусъ BAD, а CB радіусъ; слѣд. R: *кос.* BA = 2 син. BA : син. BAD.

286. *Даны синусы двухъ дугъ* AB и AC (фиг. 140); *требуется найти синусъ суммы ихъ или разности.* Надлежитъ, по исчисленіи (283) косинусовъ обѣихъ сихъ дугъ, помножить синусъ первой на косинусъ второй, а синусъ второй на косинусъ первой. Сумма двухъ произведеній, раздѣленная на полупоперешникъ, будетъ синусъ суммы двухъ дугъ; а разность тѣхъ же произведеній, раздѣленная на полупоперешникъ, будетъ синусъ разности тѣхъ же самыхъ дугъ.

Сдѣлай дугу AD равную дугѣ AC, проведи хорду CD, радіусъ LA раздѣлитъ хорду сію въ точкѣ I пополамъ; изъ точекъ C, A, I, D, опусти на BL перпендикуляры CK, AG, IH, DF; напослѣдокъ изъ точекъ I и D продолжи IM и DN параллельно къ BL. A какъ CD раздѣлена въ I пополамъ,

то и CN будетъ также раздѣлена въ M на двѣ равныя части ( 102 ).

По учиненіи сего, CK синусъ BC суммы двухъ дугъ будетъ состоять изъ KM и MC, или изъ IH и MC. DF синусъ BD разности двухъ дугъ равенъ KN, а сія линѣя равняется KM безъ MN, то есть IH безъ CM; и такъ для сысканія синуса суммы надлежитъ величину MC сложить съ IH; и напротивъ вычесть MC изъ IH для синуса разности.

Но въ подобныхъ треугольникахъ LAG, LIH будетъ LA : LI = AG : IH, то есть, R : *кос.* AC = *син.* AB : IH, и слѣд. ( Ариѳ. 169 ) IH равно $\frac{син.\ AB \times кос\ AC.}{R}$ Треугольники LAG и CIM будутъ также подобны ( ибо по рѣшенію бока одного сдѣланы перпендикулярны къ бокамъ другаго ) и произведутъ сію пропорцію LA : LG = CI : MC, или R *кос.* AB = *син.* AC : MC; почему MC равно $\frac{син.\ AC \times кос.\ AB}{R}$; и такъ для синуса суммы слѣдуетъ сложить $\frac{син.\ AC \times кос.\ AB}{R}$ съ $\frac{син.\ AB \times кос.\ AC}{R}$; а для синуса разности вычесть величину первую изъ второй.

287. *Когдажъ по извѣстнымъ синусамъ двухъ дугъ требуется сыскать*

*косинусы суммы или разности тѣхъ дугъ*; то надлежитъ по исчисленіи (283) косинусовъ каждой дуги умножить оба косинусы сіи между собою, помножить равно и оба синусы; по томъ вычтя послѣднее произведеніе изъ перваго, остатокъ раздѣлить на радіусъ, отъ чего въ частномъ произойдетъ косинусъ суммы двухъ дугъ. Но для косинуса разности должно сложить оба тѣ произведенія, и сумму ихъ раздѣлить на радіусъ. Ибо когда DC раздѣлена въ I пополамъ, то и FK будетъ также раздѣлена по поламъ въ H; но LK косинусъ суммы равенъ LH безъ HK, или LH безъ IM, слѣд. и LF косинусъ разности равенъ LH съ HF, или LH съ HK, или наконецъ LH съ IM. Посмотримъ теперь, что за величины LH и IM.

Въ подобныхъ треугольникахъ LGA, LHI будетъ LA : LI = LG : LH.

То есть R : *кос.* AC = *кос.* AB : LH;

Почему LH = $\frac{кос.\ AC \times кос.\ AB}{R}$.

Въ подобныхъ треугольникахъ LAG, CIM, будетъ LA : AG = CI : IM.

То есть R : *син.* AB = *син.* AC : IM,

Почему IM равно $\frac{син.\ AB \times син.\ AC}{R}$

И такЪ для полученія косинуса суммы надлежитЪ вычесть $\frac{\text{син. AB} \times \text{син. AC}}{R}$ изЪ $\frac{\text{кос. AC} \times \text{кос. AB}}{R}$; а для косинуса разности придать его.

268. *Сумма синусовЪ двухЪ дугЪ* AB, AC (фиг. 141) *содержится кЪ разности тѣхЪ же самыхЪ синусовЪ такЪ, какЪ тангенсЪ половинной суммы двухЪ дугЪ кЪ тангенсу половинной ихЪ разности, то есть,* *син.* AB + *син.* AC : *син.* AB — *син.* AC = *танг.* $\frac{AB + AC}{2}$ *танг.* $\frac{AB - AC}{2}$.

По проведеніи діаметра AM, перенеси дугу AB изЪ A вЪ D; протяни хорду DB, которая будетЪ перпендикулярна кЪ AM. ИзЪ точки C проведи CP перпендикулярно, а CF параллельно кЪ KM; отЪ точки F продолжи хорды FB и FD, и радіусомЪ FG равнымЪ полупоперешнику круга BAD, опиши дугу IGK, пересѣкающую CF вЪ G, и напослѣдокЪ изЪ сей точки G поставь кЪ CF перпендикулярЪ HL; линѣи GH и GL сдѣлаются тангенсы угловЪ GFH и GFL или CFB и CFD, которые имѣя верхи свои при окружности, будутЪ измѣряться половиною дугЪ CB, CD, на коихЪ они стоятЪ (63), то есть половинною разностію BC и половинною суммою CD двухЪ дугЪ AB и AC; та-

кимъ образомъ GL и GH суть тангенсы половинной суммы и половинной разности сихъ самыхъ дугъ.

Напослѣдокъ явствуетъ, что когда DS равна BS, то линѣя DE будетъ равна BS + SE или BS + CP, то есть, суммѣ синусовъ двухъ дугъ AB и AC; также BE равна BS — SE или BS — CP, то есть, разности синусовъ тѣхъ же дугъ. Но по причинѣ параллельныхъ BD, HL произойдетъ слѣдующая пропорція (115) DE : BE = LG : GH.

Слѣд. *син.* AB + *син.* AC : *син.* AB — *син.* AC = *танг.* $\frac{AB + AC}{2}$ *танг.* $\frac{AB - AC}{2}$.

289. По симъ-то правиламъ сочиняется таблица синусовъ. Ибо какъ изъ сказаннаго (275) извѣстенъ уже намъ синусъ $30^\circ$; то можно (284) найти синусъ $15^\circ$, и такъ далѣе $7^\circ\ 30'$, $3^\circ\ 45'$, $1^\circ\ 52'\ 30''$, $0^\circ\ 56'\ 15'''$, $0^\circ\ 28'\ 7''\ 30'''$, $0^\circ\ 14'\ 3''\ 45'''$, $0^\circ\ 7'\ 1''\ 52'''\ 30^{IV}$.

Напослѣдокъ примѣтить должно, что когда дуги бываютъ весьма малы, то онѣ ничѣмъ почти не различествуютъ отъ синусовъ своихъ, и слѣд. будутъ имъ пропорціональны; такимъ образомъ синусъ $1'$ найдется по сей пропорціи: *какъ дуга* $0^\circ\ 7'\ 1''\ 52'''\ 30^{IV}$ *будетъ содержаться къ дугѣ* $0^\circ\ 1'$, *такъ синусъ первой дуги къ синусу второй.*

Ежели въ сей выкладкѣ примется радіусъ такой, которой состоитъ только изъ 10000 частей, то должно находить синусы объявленныхъ дугъ съ тремя и четырью десятичными, дабы послѣ заключить о послѣдующихъ по крайней мѣрѣ одною

единицею меньше. Сіи десятичныя употребляются только въ выкладкѣ синусовъ нѣкоторыхъ дугъ, и по совершеніи всего исчисленія уничтожаются.

Отъ 1′ до 3° 0′ стоитъ только помножать синусъ 1′ попеременно на 2, 3, 4, 5 и проч. дабы получить синусы 2′ 3′ и проч. съ недостаткомъ гораздо меньшимъ единицы. Для выкладки же синусовъ превышающихъ 3° должно употреблять объявленной (286) способъ: но и въ семъ случаѣ трудъ сокращается исчисленіемъ синусовъ однихъ только градусовъ. Чтожъ касается до минутъ между тѣми градусами находящихся, то для сысканія ихъ довольствуемся, взявши разность двухъ послѣдующихъ градусовъ и пославъ сію пропорцію, *какъ 60 минутъ къ искомому числу минутъ, такъ разность синусовъ двухъ ближайшихъ градусовъ къ четвертому члену*, которой будетъ то самое, что надобно прибавить къ меньшому изъ тѣхъ синусовъ, дабы опредѣлить синусъ требуемаго числа градусовъ и минутъ. На примѣръ когда сыскавши, что синусы 8° и 9° суть 13917 и 15643, желаю узнать синусъ 8° 17′; для сего беру разность 1726 тѣхъ синусовъ, и нахожу четвертой членъ пропорціи, въ которой тремя первыми будутъ 60′ : 17 = 1726.

Сей четвертый членъ, которой безъ малаго будетъ 489, приданъ будучи къ 13917, сдѣлаетъ сумму 14406 для синуса 8° 17′ такого, какой находится въ таблицахъ, и которой разнствуетъ меньше чѣмъ на единицу отъ настоящаго.

Причина сей практики основана на томъ, что въ малой дугѣ KL (*фиг.* 122) на пр. 1′, разности LM, I*u* синусовъ LF, IH бываютъ почти пропорціональны разностямъ KL, KI, соотвѣтствующихъ дугъ AL, AI; ибо треугольники, KML, K*u*I, принявъ ихъ за прямолинѣйные, будутъ подобны.

290. Сей способъ не далѣе употреблять должно, какъ до 87°, послѣ же сего числа не можно уже принимать болѣе *iu* (*фиг.* 142) за разность синусовъ PB, Q*x*; ибо какъ бы количество *их* мало не было, имѣетъ однакожъ чувствительное содержаніе съ *iu*, и тѣмъ

чувствительнѣе, чѣмъ больше дуга АВ приближается къ 90° Въ семъ случаѣ вспомнить должно, что (173) линѣи DE, Dt, которыя суть разности между радїусомъ и синусами PB, Qx, будутъ пропорцїональны квадратамъ хордъ DB и Dx, или (по причинѣ весьма малыхъ дугъ DB и Dx) квадратамъ сихъ дугъ DB и Dx; чего ради нашедши синусъ 87°, возми разность между имъ и радїусомъ 100000, и сыщи синусъ всякой другой дуги между 87° и 90°, посылая сїю пропорцїю: *квадратъ 3° или 180′ къ квадрату числа минутъ дополненія искомой дуги, такъ разность между радїусомъ и синусомъ 87° къ четвертому члену*, которой будетъ Dt; напослѣдокъ отнявъ Dt изъ радїуса, получишь Ct или Qx синусъ желаемой дуги.

На примѣръ ежели сыскавъ, что синусъ 87° есть 99863, желаю знать синусъ 88° 24′, котораго дополненїе будетъ 1° 36′ или 96′; въ такомъ случаѣ посылаю сїю пропорцїю $\overline{180'}^{2} : \overline{96'}^{2} = 137 : Dt$, и нахожу Dt близу 39; потомъ выключивъ 39 изъ 100000, получаю 99965 для синуса 88° 24′, какой и въ таблицахъ дѣйствительно находится.

291. Сыскавши такимъ образомъ синусы, не трудно послѣ по объявленному (282) найти тангенсы и секансы.

292. Чтожъ касается до логариѳмовъ прїисканныхъ синусовъ, то для нихъ дѣлается такая же выкладка, какая и для сбыкновенныхъ чиселъ. Со всѣмъ тѣмъ надлежитъ замѣтить, что ежели взявъ изъ таблицъ величину синуса въ числахъ, по оной будешь искать, какъ было предписано (Ариѳ. 225), логариѳмъ, то логариѳмъ сей не найдется точно такой, какой находится въ столпцѣ логариѳмовъ синусовъ, по той причинѣ, что синусы таблицъ сочинены вначалѣ по раздѣленїю синуса на 10000000000 частей; а какъ обыкновенныя выкладки не требуютъ такой точности, то въ нынѣшнихъ таблицахъ отбросили послѣднїе пять знаковъ отъ числовой величины синусовъ, тангенсовъ и проч. такъ что величины сїи, которыя теперь пред-

ставляются въ таблицахъ, соотвѣтствуютъ единственно раздѣленїю радїуса на 100000. Логариѳмы же синусовъ, тангенсовъ и проч. оставлены точно такими, какими они сначала были выложены, то есть, въ предположенїи радїуса на 10000000000 частей раздѣленнаго, и для сей-то самой причины характеристика показывается гораздо больше противъ числовой величины соотвѣтствующаго синуса или тангенса, такъ что при употребленїи логариѳмъ въ синусовъ, тангенсовъ и проч. дѣлается выкладка въ умственномъ предположенїи радїуса на 10000000000 частей раздѣленнаго; при употребленїи же числовой величины синусовъ, тангенсовъ и проч. дѣлается выкладка по радїусу, раздѣленному на 100000 частей только. Что касается до логариѳмъ въ тангенсовъ и секансовъ, то они, какъ скоро извѣстны логариѳмы синусовъ, сыскиваются однимъ простымъ сложенїемъ и вычитанїемъ; сїе явствуетъ изъ сказаннаго (282 и Ариѳ. 216).

293. Хотя обыкновенныя таблицы содержатъ синусы для однихъ градусовъ и минутъ только, совсѣмъ тѣмъ можно найти величины и такихъ линѣй, которыя будутъ представлять собою синусы градусовъ, минутъ и секундъ, употребляя въ рѣшенїи точно такой же способъ, какой мы предписали для градусовъ и минутъ. Но какъ чаще употребляются логариѳмы сихъ линѣй, нежели самыя линѣи, то мы остановимся нѣсколько на послѣднемъ предметѣ.

Предположивъ, что логариѳмы синусовъ и тангенсовъ сочинены на одни градусы и минуты только, есть ли потребуется узнать логариѳмъ синуса нѣкотораго числа градусовъ, минутъ и секундъ; въ такомъ случаѣ возьми изъ таблицъ логариѳмъ синуса для одного числа градусовъ и минутъ, по томъ найди разность между симъ и ближайшe къ нему большимъ логариѳмомъ и посылай слѣдующую пропорцїю; 60 секундъ къ требуемому числу секундъ, такъ разность логариѳмовъ, взятая въ таблицахъ къ четвертому члену; сей членъ придавъ къ логариѳму синуса градусовъ и минутъ, получишь логариѳмъ желаемаго синуса.

Напротивъ, ежели случится логариѳмъ синуса такой, которой не соотвѣтствуетъ въ точности числу градусовъ и минутъ, то, дабы сыскать и секунды, сдѣлай сїю посылку: какъ разность двухъ логариѳмовъ, между которыми заключается данный логариѳмъ, будетъ содержаться къ разности находящейся въ таблицахъ между симъ самымъ логариѳмомъ и ближайше къ нему меньшимъ, такъ бо секундъ къ четвертому члену; сей четвертый членъ будетъ точно то число секундъ, кои прибавить должно къ числу градусовъ и минутъ дуги, которая въ таблицѣ меньше искомой.

294. Правило сїе употреблять можно до тѣхъ поръ, пока дуга будетъ больше 3 градусовъ, а когда она случится меньше, то поступай по сему примѣру: положимъ, что требуется синусъ 1° 55′ 48″; сдѣлай для сего слѣдующую посылку 1° 55′ : 1° 55′ 48″ = *син.* 1° 55′ къ четвертому члену, которой (по причинѣ, что малѣйшїя дуги пропорцїональны синусамъ своимъ) будетъ безъ чувствительной ошибки синусъ 1° 55′ 48″. А для большей удобности въ выкладкѣ можно привести два первые члена въ секунды, и взявъ въ таблицахъ логариѳмъ синуса 1° 55′, придай къ нему какъ къ третьему члену пропорцїи логариѳмъ 1° 55′ 48″, приведенныхъ въ секунды, напослѣдокъ изъ суммы вычти логариѳмъ 1° 55′ приведенныхъ въ секунды; остатокъ (Ариѳ. 216) покажетъ логариѳмъ четвертаго члена, то есть, искомой логариѳмъ.

И обратно, сыщется число градусовъ, минутъ и секундъ для дуги меньше 3 градусовъ по извѣстному ея синусу слѣдующимъ образомъ: прїищи сначала въ таблицахъ число градусовъ и минутъ, потомъ дѣлай посылку: какъ синусъ числа найденныхъ градусовъ и минутъ къ данному синусу, такъ тоже самое число градусовъ и минутъ, приведенныхъ въ секунды, ко всему числу секундъ искомой дуги. Въ логариѳмахъ рѣшенїе будетъ такое: найди разность между логариѳмомъ даннаго синуса и логариѳмомъ синуса ближайше къ нему меньшаго, придай сїю разность къ логариѳму найденнаго числа градусовъ и минутъ, приведенныхъ въ

секунды; сумма покажетъ логариѳмъ числа секундъ, находящихся въ искомой дугѣ. На пр. ежели дано будетъ 8,6233427 за логариѳмъ синуса нѣкоторой дуги; нахожу въ таблицахъ, что число градусовъ и минутъ больше всѣхъ отвѣтствуетъ сему логариѳму 2° 24′, и что разность между логариѳмомъ даннаго синуса и логариѳмомъ синуса сей послѣдней дуги есть 0003811; складываю сію разность съ 3,9365137, логариомомъ 2° 24′ приведенныхъ въ секунды; сумма 3,9378948 отвѣчаетъ въ таблицахъ логариѳмовъ числу 8667, то есть секундамъ искомой дуги; и слѣд. она будетъ состоять изъ 2° 24′ 27″. Сіе правило въ разсужденіи предыдущаго есть обратное.

295. Для исчисленія логариѳмовъ тангенсовъ, надлежитъ послѣдовать тѣмъ же самымъ правиламъ, перемѣнивъ только названіе *синуса* въ *тангенсъ*. Но выключаются изъ сего дуги, содержащіяся между 87 и 90 градусами, для коихъ употребляется слѣдующій способъ. Найди логариѳмъ тангенса дополненія по предписанному для тангенсовъ правилу, и вычти сей логариѳмъ изъ удвоеннаго логариѳма радіуса. Понеже подобные треугольники CBD, CFE (*фиг.* 136) показываютъ, что въ пропорціи, которой первыми тремя членами служатъ котангенсъ, радіусъ и радіусъ, тангенсъ будетъ четвертый членъ. Ежели же напротивъ того данъ будетъ логариѳмъ тангенса такой дуги, которая заключается между 87 и 90 градусами, и содержитъ въ себѣ секунды, то въ такомъ случаѣ отнявъ сей логариѳмъ изъ удвоеннаго логариѳма радіуса, получишь тангенсъ дополненія, которой по необходимости долженъ будучи содержаться между 0 и 3 градусами, удобно опредѣлится по предыдущему правилу; напослѣдокъ взявъ дополненіе дуги, найденной такимъ образомъ, получишь искомую дугу.

296. Какъ синусъ дуги есть половина хорды двойной дуги; то ежели бы по предписанному (284) правилу, сыскавъ синусъ

дуги, соотвѣтствующей весьма близко одной секундѣ, и удвоивъ сей синусъ для хорды 2 секундъ, умножили сей двойной синусъ на столько разъ, сколько дуга 2 секундъ содержится въ половинѣ окружности; то явствуетъ, что посредствомъ сего нашлось бы такое число, которое весьма близко подходило бы къ длинѣ половины окружности, но было бы совсѣмъ тѣмъ поменьше ея; по томъ ежели бы по показанной (282) пропорціи, сыскали тангенсъ одной секунды, и удвоивъ его помножили бы также на столько разъ, сколько двойная сія дуга содержится въ половинѣ окружности, то чрезъ то получили бы число весьма близко подходящее къ половинѣ окружности, но побольше ея; и такъ посредствомъ выкладки синусовъ можно показать весьма близкое содержаніе поперешника къ окружности, и послѣдуя предписаннымъ правиламъ нашли бы, что половина окружности, которой полупоперешникъ будетъ по положенію раздѣленъ на 1000000000, заключалась бы между 3141592б536 и 3141592б535.

Заключимъ же изъ сего, что когда радіусъ будетъ 1, то 180 градусовъ или половина окружности должна равняться 3,1415926535; градусъ 0,0174532925; минута 0,0002908882; секунда 0,0000048481, и такъ далѣе.

## *О Астролабіи.*

297 Прежде нежели покажемъ употребленіе предыдущихъ правилъ въ рѣшеніи треугольниковъ, за приличное почитаемъ дать знать, какъ измѣряются углы, составляющіе важную часть треугольниковъ.

Инструментъ, служащій по большой части на практикѣ къ измѣренію угловъ съ довольною точностію, называется *Астролабія* (*фиг.* 145).

Она дѣлается обыкновенно или изъ цѣлаго мѣднаго круга или полукруга, раздѣленнаго на 180 градусовъ, и на которомъ, смотря по величинѣ поперешника его, означаются также и полградусы.

Половина окружности DHB съ означеніемъ раздѣленій бываетъ не простая линѣя, но полукруговой вѣнецъ, которой дѣлается мастерами иногда уже, а иногда шире. Поперешникъ DB утверждается неподвижно на инструментѣ семъ, но поперешникъ EC прикрѣпляется только въ центрѣ A и удобно оборачивается около его, пробѣгая концомъ C всѣ раздѣленія Астролабіи. По концамъ каждаго изъ поперешниковъ вставливаются *діоптры*, которые служатъ для того,

чтобъ смотрѣть сквозь ихъ на предметы. Иногда занимаютъ мѣсто діоптровъ зрительныя трубки. Тотъ діоптръ, которой находится на поперешникѣ DB, бываетъ съ нимъ параллеленъ и неподвиженъ, но тотъ, который накладывается на поперешникъ EC, называется подвижнымъ, потому что можетъ съ нимъ вмѣстѣ передвигаться и нѣсколько къ нему наклоняться для того, чтобъ не было нужды перемѣнять плоскости Астролабіи, когда смотришь на предметы, нѣсколько выше или нѣсколько ниже противъ плоскости Астролабіи, лежащіе.

Астролабія съ такимъ приборомъ кладется на *штатифъ* или *треножникъ*, и можетъ посредствомъ *бакштаба или яблока* склоняться всячески, отнюдь не перемѣняя положенія штатифа.

Дабы Астролабія съ большею исправностію могла измѣрять углы, показывая даже части градуса; то для сего весьма часто на концѣ подвижнаго поперешника дѣлаются раздѣленія, которыя относительно къ раздѣленіямъ половины окружности показываютъ части градусовъ до 5 или до 4 минутъ и проч.

А означутся они на пр. до 5′ тогда, когда на концѣ подвижнаго поперешника по-

ложится разстояние 11 градусовъ, и раздѣлится потомъ на 12 равныхъ частей, изъ коихъ слѣд. каждая часть будетъ содержать 55′ Когда первое раздѣленіе поперешника сходствуетъ съ раздѣленіемъ полкруга, въ такомъ случаѣ уголъ, заключающійся между двумя поперешниками, измѣряется раздѣленіями полкруга. Когдажъ первое раздѣленіе поперешника не сходствуетъ съ раздѣленіемъ полкруга, въ такомъ случаѣ должно искать на томъ и на другомъ, какое раздѣленіе сходствуетъ больше, и замѣтивъ оное, приложи къ числу градусовъ, означенныхъ на полкругѣ между первымъ раздѣленіемъ его и раздѣленіемъ поперешника, столько разъ 5 минутъ, сколько будетъ разстояній на поперешникѣ между первымъ его раздѣленіемъ и тѣмъ, которое сходствуетъ съ раздѣленіемъ полкруга; причиною сему то, что въ каждомъ разстояніи находится 5 минутъ разности между полкругомъ и поперешникомъ.

До 4 минутъ вымѣрять можно уголъ тогда, когда возмется дуга 14 градусовъ и раздѣлится на 15 частей; напослѣдокъ до 3′, когда дуга 19 градусовъ раздѣлится на 20 частей.

Измѣряются углы помощію сего инструмента слѣдующимъ образомъ: на пр. еже-

ли надобно вымѣрять уголъ, которой въ точкѣ A (*фиг.* 145) составляютъ линѣи, умственно проведенныя отъ сей точки къ двумъ предметамъ G и F; въ такомъ случаѣ центръ Астролабіи поставляется надъ точкою A и располагается сама такъ, что когда будешь смотрѣть сквозь неподвижные діоптры на одинъ изъ предметовъ F, другой бы G находился въ ровномъ положеніи съ плоскостію инструмента сего, что устрояется большимъ или меньшимъ склоненіемъ Астролабіи: по томъ подвижный діаметръ EC передвигается до тѣхъ поръ, пока сквозь діоптры E и C будетъ видѣнъ предметъ G; дута BC, содержащаяся между двумя поперешниками, служитъ мѣрою угла GAF.

Когдажъ требуетъ нужда вымѣрять углы въ вертикальной плоскости, то есть, углы находящіеся въ такой плоскости, которая сходствуетъ съ отвѣсною линѣею; въ такомъ случаѣ приводится Астролабія въ вертикальное положеніе съ помощію маленькой гирки на нитку привязанной; когда наниткѣ, прицѣпленной къ центру Астролабіи, гирька будетъ упадать параллельно съ плоскостію противъ раздѣленія 90°, тогда Астролабія бываетъ въ приличномъ положеніи, то есть, въ вертикальномъ.

## *О рѣшеніи прямоугольныхъ Треугольниковъ.*

298. Сказали мы выше (271), что для рѣшенія всякаго треугольника надлежитъ знать три изъ шести частей составляющихъ его, такія, въ которыхъ бы по крайней мѣрѣ находился одинъ бокъ. А какъ прямой уголъ всегда бываетъ извѣстенъ, почему въ прямоугольномъ треугольникѣ можно довольствоваться двумя разными частями, кромѣ прямаго угла, такими однакожъ, между которыми бы заключался бокъ. Надлежитъ замѣтить здѣсь, что въ прямоугольномъ треугольникѣ какъ скоро будетъ извѣстенъ одинъ изъ двухъ острыхъ угловъ, то и другой будетъ непремѣнно извѣстенъ, понеже оба они составляютъ 90°.

При рѣшеніи прямоугольныхъ треугольниковъ наблюдается четыре случая: а именно между двумя извѣстными частями должны быть даны или одинъ острой уголъ и катетъ; или острой уголъ и гипотенуза; или катетъ съ гипотенузою; или напослѣдокъ два катета.

Выключая случай, въ которомъ по извѣстнымъ двумъ бокамъ требуется найти третій, и которой рѣшится по показанно-

му (166) правилу, сiи всѣ четыре случая могутъ рѣшиться по одной изъ слѣдующихъ двухъ пропорцiй или свойствъ.

299. 1е. *Синусъ цѣлой, взятой изъ таблицъ, содержится къ синусу какого нибудь остраго угла, какъ гипотенуза къ боку, лежащему противъ того остраго угла.*

300. 2е. *Синусъ цѣлой содержится къ тангенсу какого нибудь остраго угла, какъ катетъ, лежащiй при томъ углѣ къ катету, противоположенному ему.*

Для доказательства перваго свойства, стоитъ только (*фиг.* 143) въ прямоугольномъ треугольникѣ CED принять часть CA гипотенузы за радiусъ или цѣлой синусъ, находящiйся въ таблицахъ; по томъ по начерченiи дуги AB, перпендикуляръ AP будетъ синусъ угла ACB или DCE; но по причинѣ параллельныхъ AP и DE можетъ въ подобныхъ треугольникахъ CAP и CDE имѣть мѣсто слѣдующая посылка, CA : AP = CD : DE, то есть, R : *син.* DCE = CD : DE, что сходствуетъ точно съ первымъ свойствомъ.

Такимъ же образомъ докажется, что R : *син.* CDE = CD : CE.

Что касается до второй пропорціи, то принявъ въ треугольникѣ CEF (*фиг.* 144) часть CA бока CE за цѣлый синусъ, опиши дугу AB, отъ чего перпендикуляръ AD, поставленный изъ точки A на AC, сдѣлается тангенсомъ угла C или FCE; а по причинѣ подобія треугольниковъ CAD, CEF, будетъ служить сія посылка, CA : AD = CE : EF, то есть, R : *танг.* FCE = CE : EF, что сходствуетъ со вторымъ свойствомъ.

Равнымъ образомъ доказано будетъ, что R : *танг.* CEF = FE : CE.

301. Въ послѣдующихъ примѣрахъ мы на мѣсто синусовъ, тангенсовъ и проч. будемъ всегда употреблять логариѳмы синусовъ, тангенсовъ и проч. А дабы утвердить начинающихъ въ познаніи Ариѳметическихъ дополненій, то мы не преминемъ во всѣхъ выкладкахъ дѣлать и имъ употребленіе, выключая одни тѣ случаи, когда логариѳмъ, слѣдующій къ вычитанію, будетъ логариѳмъ радіуса; потому что онъ имѣя всегда характеристикою 10, а мантиссою нули, и безъ того весьма легко вычитается.

По симъ наблюденіямъ приступимъ къ примѣрамъ даказанныхъ предъ симъ двухъ

свойствъ, относящихся къ четыремъ случаямъ рѣшенія треугольниковъ.

ПРИМѢРЪ I. *Найти высоту* AC *какого нибудь строенія* (фиг. 146) *по сдѣланнымъ на землѣ измѣреніямъ.*

Отойди отъ зданія на нѣкоторое разстояніе CD такое, чтобъ уголъ, заключающійся между двумя линѣями, умственно проведенными изъ точки D къ основанію и верьху того строенія, не былъ ни съ лишкомъ остръ, ни съ лишкомъ сходствовалъ съ прямымъ; и вымѣрявъ разстояніе CD, поставь надъ точкою D штатифъ Астролабіи. Расположи инструментъ сей такъ, чтобы плоскость его была вертикальна и стояла прямо противу оси AC башни, а неподвижной діаметръ HF сходствовалъ съ горизонтомъ, что устрояется помощію отвѣса, опущеннаго изъ центра Астролабіи на ниткѣ. Подвижной діаметръ наведи такъ, чтобъ сквозь діоптры или зрительныя трубки видѣть было можно верхъ A башни. Напослѣдокъ сочти на окружности число градусовъ угла FEG, которой будетъ точно такойже, какой и противоположенной его при верху AEB.

Но какъ высота AC зданія, будучи перпендикулярна къ горизонту, должна быть также перпендикулярна и къ BE; слѣд. треугольникъ ABE есть прямоугольной, въ которомъ сверхъ прямаго угла извѣстны BE равная CD и уголъ AEB; требуется же величина AB, почему явствуетъ, что три извѣстныя части и четвертая искомая будутъ членами показанной (300) пропорціи; и такъ найдется AB по сей посылкѣ R : *танг.* AEB = BE : AB.

Положимъ, что разстояніе CD или BE было бы найдено 132 футовъ, а уголъ AEB 48° 54′, то посылай R : *танг.* 48° 54′ = 132 : AB; послѣ чего прiискавъ въ таблицахъ величину тангенса 48° 54′, помноживъ ее на 132, и произведеніе раздѣливъ на величину радіуса, взятаго изъ таблицъ, получишь число футовъ для высоты AB, а къ ней прибавивъ высоту ED Астролябіи, получишь искомую высоту AC.

Но въ логариѳмахъ дѣйствіе скорѣе и удобнѣе произведено быть можетъ слѣдующимъ образомъ:

| | |
|---|---|
| Лог. танг. 48° 54′ . . . . . . . | 10,0593064 |
| Лог. 132 . . . . . . . . . . . . | 2,1205739 |
| Сумма . . . . . . . . . . . | 12,1798803 |
| Лог. радіуса . . . . . . . . . . | 10,0000000 |
| Разность, показывающая лог. величины AB . . . . . . . | 2,1798803 |

Логариѳмъ сей отвѣчаетъ въ таблицахъ числу 151, 32; такимъ образомъ AB равно 151 футу и 32 сотымъ, или 151 ф 3 д 10 л.

Замѣтимъ здѣсь, что какъ логариѳмъ цѣлаго синуса или радіуса имѣетъ 10 харак-

теристикою, а нули мантиссою, то можно при сложеніи и вычитаніи не писать его, а только что прикладывать или отнимать единицу отъ десятковъ характеристики того логариѳма, съ которымъ онъ складываться или вычитаться долженъ.

ПРИМѢРЪ II. BDC (фиг. 147) *есть окружность контрескарпа, заключающаяся между равными продолженіями* AB, AC *двухъ фасовъ бастіона; требуется узнать хорду* BC *и стрѣлку* DE *той окружности, предполагая, что* AB, AC *и уголъ* BAC *равный углу бастіона, даны.*

Пусть AB и AC будутъ каждая по 120 футовъ, и уголъ BAC 83° 8′, то . . . . . . . . . .

Въ треугольникѣ BEA прямоугольномъ въ E, будетъ (299).

1 е. R : *син.* BAE = AB : BE.
2 е. R : *син.* ABE или *кос.* BAE = AB : AE
И такъ 1 е. . . . . . . . . . . . . . .

| | |
|---|---|
| Лог. AB, или лог. 120 ф . . . . . . . | 2,0791812 |
| Лог. *син.* BAE или лог. *син.* 41° 34′ . . . . | 9,8218351 |
| Сумма безъ лог. радіуса . . . . . . | 11,9010163 |

Логариѳмъ сей отвѣчаетъ 79 ф, 62; слѣд. хорда BC состоитъ изъ 159 ф, 24.

| | |
|---|---|
| 2 е. Лог. 120 ф . . . . . . . . . | 2,0791812 |
| Лог. *кос.* 42° 34′ . . . . . . . . . | 9,8740085 |
| Сумма безъ лог. радіуса . . . . . | 11,9531897 |

Отвѣчаетъ 89 ф, 78; слѣд. стрѣлка BE или AD — AE равна 30 ф, 23.

Тѣмъ же способомъ, помощію котораго сыскали мы хорду DE, можетъ рѣшиться слѣдующій другой вопросъ: *опредѣлить зазоръ ядра въ пушкахъ даннаго калибра?*

Способъ чертежа, которой принятъ для сего, состоитъ въ слѣдующемъ: надлежитъ на концѣ A

(*фиг.* 148) линѣи AB, равной дїаметру ядра, поставить перпендикуляръ AD равный полупоперешнику AC; изъ точки A какъ изъ центра радїусомъ AD описать дугу DCE, которая пересѣчетъ въ E окружность, имѣющую поперешникомъ AB; напослѣдокъ по перенесенїи хорды DE изъ B въ F, AF будетъ зазоръ ядра, то есть, что AF есть то количество, чѣмъ внутреннїй дїаметръ пушки больше дїаметра ядра.

Опредѣлится же AF выкладкою, когда вообразивъ хорду AE, найдемъ DE въ равнобедренномъ треугольникѣ DAE, котораго бока AD, AE извѣстны, потому что каждой изъ нихъ равенъ полупоперешнику ядра, и уголъ DAE (63 и 93) 150°; и такъ вообразивъ изъ точки A на хордѣ DE перпендикуляръ, получишь два равные прямоугольные треугольника, сыщи по которому нибудь изъ нихъ, какъ въ предыдущемъ примѣрѣ было показано, величину половины хорды DE; удвоивъ ее вычти изъ AB, получишь AF.

На пр. въ пушкѣ 4, ядро бываетъ $3^{д}\ 0^{л}\ 3^{с}\ \frac{3}{4}$, или $3^{д}$, 026; найдется DE $2^{д}$, 923; слѣд. зазоръ ядра въ пушкѣ сего калибра будетъ $0^{д}$, 103 или $0^{д}\ 2^{л}\ 2^{с}\ \frac{4}{5}$.

ПРИМѢРЪ III. *Даны канатъ якоря* AC (фиг. 149) 192 *футовъ, а глубина* AB *рѣки* 12ф, *требуется найти уголъ* ACB, *которой дѣлаетъ канатъ съ дномъ рѣки* BC, *предположивъ, что дно ея горизонтально и никакой отлогости не находится въ канатѣ.*

Вообразивъ прямоугольной треугольникъ ABC, въ которомъ извѣстны AC 192ф, AB 12ф и уголъ прямой B, найдется уголъ ACB сею (299) посылкою,

$$AC : AB = R : \textit{син.}\ ACB$$

И такъ въ логариѳмахъ,

| | |
|---|---|
| Лог. AB . . . . . . . . . . . . . | 1,0791812 |
| Лог. радїуса . . . . . . . . . . . | 10,0000000 |
| Ариѳм. дополн. Лог. AC. . . . . . | 7,7166988 |
| Сумма . . . . . . . . . . | 18,7958800 |

или лог. *син.* ACB, которой въ таблицахъ отвѣчаетъ 3° 35′.

ПРИМѢРЪ IV. *Найти уголъ, которой линѣя направленія составляетъ съ продолженною осью въ пушкѣ калибра и мѣры данныхъ.*

Ежели изъ точки H (*фиг.* 71) дульнаго карниза пушки вообразимъ прямую линѣю HI параллельную съ осью AB, то уголъ GHI будетъ равенъ углу GCA, которой линѣя направленія дѣлаетъ съ продолженною осью. И такъ знавши въ прямоугольномъ треугольникѣ GIH бокъ GI и бокъ HI, легко найдется уголъ GHI по сей посылкѣ (300), IH : GI = R : *танг.* GHI. На пр. въ полевой пушкѣ 12 будетъ,

| | |
|---|---|
| AG . . . . . . . . . . . . . . . | 64,231 |
| BH . . . . . . . . . . . . . . . | 4,926 |
| И слѣд. GI . . . . . . . . . . . . . . . | 1,305 |
| При томъ HI . . . . . . . . . . . | 77,254 |

Почему 77,254 : 1,305 или 77254 : 1305 = R : *танг.* GHI; а въ логариѳмахъ

| | |
|---|---|
| Лог. 1305. . . . . . . . . . . | 3,1156105 |
| Лог. радіуса . . . . . . . . . | 10,0000000 |
| Ариѳ. дополн. 77254 . . . . . | 5,1120790 |
| Сумма . . . . . . . . . . . | 18,2276895 |

Есть логариѳмъ тангенса искомаго угла, которой будетъ 0° 58′.

ПРИМѢРЪ V. *въ полевой пушкѣ* 12, *поставленной на три градуса, требуется узнать, на какую высоту поднимается линѣя направленія въ разстояніи* 600 *тоазовъ, которое не многимъ чѣмъ меньше выстрѣла сей пушки подъ угломъ* 3 *градусовъ.*

Когда линѣя направленія составляетъ съ осью уголъ 58′, какъ мы то уже видѣли, то явствуетъ, что она съ горизонтомъ должна сдѣлать уголъ 2° 2′; такимъ образомъ высота ея на горизонтальномъ разстояніи 600 тоазовъ будетъ служить другимъ катетомъ въ прямоугольномъ треугольникѣ, котораго уголъ, лежащій при первомъ катетѣ 600 тоазовъ, равенъ 2° 2′. Слѣд. катетъ найдется по посылкѣ (300), R : *танг.* 2° 2′ = 600T къ четвертому члену, которой найдется 21T, 3.

ПРИМѢРЪ VI. *Рикошетной выстрѣлъ первой амбразуры батареи напрявленъ подъ прямымъ угломъ* (фиг. 150), *требуется сыскать склоненіе седьмой амбразуры; то есть уголъ, которой дѣлаетъ линѣя выстрѣла съ эполементомъ* AC *въ седьмой амбразурѣ; предположивъ, что всѣ пушки сей батареи напрявлены къ одной точкѣ* B, *отстоящей на* 1500 *футовъ.*

Какъ линѣя AB выстрѣла изъ первой амбразуры предположена перпендикулярною къ эполементу AC; то стоитъ только найти уголъ BCA въ прямоугольномъ треугольникѣ BAC, котораго уголъ A прямой, бокъ AB 1500 футовъ, а бокъ AC опредѣленъ величиною, разстояніемъ и числомъ амбразуръ.

Пусть для примѣра разстояніе отъ средины первой амбразуры до средины второй къ ней ближайшей дано 20 футовъ; слѣд. посылай сію пропорцію 120 : 1500 = R : *танг.* BCA А въ логариѳмахъ.

Лог. 1500 . . . . . . . . . 3,1760913
Лог. радїуса . . . . . . . 10,0000000
Ариѳ. допол. лог. 120 . . . 7,9208188

Сумма . . . . . . 11,0969101 представитъ лог. тангенса угла BCA, которой будетъ 85° 26.

Какъ платформа DF должна быть всегда перпендикулярна къ линѣи выстрѣла, и находиться на эполементѣ по крайней мѣрѣ однимъ своимъ концомъ, слѣд. она составляетъ съ эполементомъ уголъ ADF, дополненїе угла DCE или ACB нами опредѣленнаго; почему знавши длину DF платформы и слѣд. половину DE удобно сыщется разстоянїе CE отъ эполемента, гдѣ на линѣѣ выстрѣла должна находиться середина E платформы.

## О рѣшеніи косоугольныхъ Треугольниковъ.

302. Названіе *косоугольныхъ треугольниковъ служитъ* вообще къ означенію та-

кихъ треугольниковъ, которые не имѣютъ прямаго угла.

303. *Во всякомъ прямолинѣйномъ треугольникѣ синусъ какого нибудь угла содержится къ противоположенному боку того угла, какъ синусъ всякаго другаго угла тогоже треугольника къ боку ему противоположенному.*

Для доказательства опиши кругъ около треугольника ABC (*фиг.* 151), проведи радіусы DA, DB, DC, и принявъ радіусъ D*b* за цѣлой синусъ таблицъ, опиши имъ другой кругъ *abc*; наконецъ точки сѣченія *a*, *b*, *c* соедини хордами *ab*, *bc*, *ac*; треугольникъ *abc* произойдетъ подобный треугольнику ABC, ибо линѣи D*a* D*b* равны и слѣд. пропорціональны линѣямъ DA, DB; почему *ab* (105) параллельна съ AB, равнымъ образомъ *bc* параллельна съ BC, и *ac* параллельна съ AC; и такъ (102) AB : *ab* = BC : *bc* или AB : $\frac{1}{2}$ *ab* = BC : $\frac{1}{2}$ *bc*; но половина хорды *ab* есть (274) синусъ дуги *ab* половины *abb*; а какъ сія половинная дуга *ab* измѣряетъ уголъ при окружности *acb*, равный ACB, слѣд. $\frac{1}{2}$ *ab* есть синусъ угла ACB; по той же причинѣ $\frac{1}{2}$ *bc* будетъ синусъ угла BAC; и такъ слѣдуетъ изъ сего, что AB : *син.* ACB = BC : *син.* BAC.

304. Сіе предложеніе служитъ къ рѣшенію треугольника, въ которомъ . . .

1е. *Ежели извѣстны два угла и одинъ бокъ.*

2е. *Два угла и одинъ бокъ, противоположенный какому нибудь изъ данныхъ боковъ.*

ПРИМѢРЪ I. *Требуется сыскать разстоянія* CA, CB (фиг. 152) *отъ галіота* C *къ двумъ батареямъ, на берегу находящимся* A и B.

Изъ точекъ A и B вымѣрять должно (въ одно и тоже время, естьли галіотъ находится въ движеніи) углы CAB, CBA; по томъ разстояніе AB между батареями A и B. Послѣ чего въ треугольникѣ CAB, коего извѣстны два угла и бокъ, вычтя изъ 180° сумму двухъ найденныхъ угловъ, получишь третій, и опредѣлишь AC и CB слѣдующими двумя пропорціями:

*син.* C : AB = *син.* B : AC
*син.* C : AB = *син.* A : BC.

Положимъ, что AB найдена 256 сажень; уголъ A 84° 14′; уголъ B 85° 40′, почему уголъ C будетъ 10° 6′; слѣд. AC и BC найдены будутъ посредствомъ логариѳмовъ такъ:

| | |
|---|---|
| Лог. *син.* B . . . 9,9987567 | Лог. *син.* A . . 9,9977966 |
| Лог. AB . . . . . 2,4082400 | Лог. AB . . . . 2,4082400 |
| Ариѳ. допол. } Лог. *син.* C } 0,7560528 | Ариѳ. допол. } Лог. *син.* C } 0,7560528 |
| Лог. AC . . . . 13,1630495. | Лог. CB . . . 13,1620894 |
| Слѣд. AC 1445 саж. | Слѣд. CB 1452 сажень. |

ПРИМѢРЪ II. *Даны разстояніе* AC (фиг. 153) *отъ точки* C *до угла бастіона, разстояніе* AB *между шпицами бастіоновъ, или внѣшній бокъ полигона и уголъ* C; *спрашивается опредѣлить разстояніе* BC.

Пусть внѣшній бокъ AB будетъ 200 тоазовъ, разстояніе AC 130 тоазовъ, и уголъ C 59° 16'.

Найдется вопервыхъ уголъ B по пропорціи AB : син. C = AC : син. B; въ логариѳмахъ же получишь,

| | |
|---|---|
| Лог. син. 59° 16' . . . . . . . . . | 9,9342737 |
| Лог. 130 . . . . . . . . . . . . . | 2,1139434 |
| Ариѳ. допол. лог. 200 . . . . . | 7,6989700 |
| Сумма . . . . . . . . . . . . | 19,7471871. |

Логариѳмъ сей будетъ синуса угла B; а поне же синусъ (279) принадлежитъ какъ острому такъ и тупому углу, которой служитъ первому дополненіемъ, въ вопросѣ же ничего не объявлено объ углѣ B, тупой онъ или острой; почему не можно принять за величину угла B ни количества 33° 58', которое отвѣчаетъ въ таблицахъ найденному логариѳму, ни дополненія его 146° 2'. Но пусть уголъ B данъ былъ бы острой, то взявъ 33° 58' за величину его, заключаю, что уголъ BAC равенъ 68° 46'. Напослѣдокъ узнаю бокъ BC, сдѣлавъ сію посылку, син. C : AB = син. BAC : BC; и

| | |
|---|---|
| Лог. 200 . . . . . . . . . . . . . | 2,3010300 |
| Лог. син. 86° 46' . . . . . . . | 9,9993081 |
| Ариѳ. допол. лог. син. 59° 16' . . . | 0,0657263 |
| Сумма . . . . . . . . . . . | 12,3660644 |

По логариѳму сему нахожу, что бокъ BC равняется 232 Т, 4.

305. *Естьли дадутся сумма двухъ количествъ и разность ихъ, то большое количество найдется, когда къ половинѣ суммы придана будетъ половинная разность; а меньшое, когда половинная разность вычтется изъ половинной суммы.*

На примѣрѣ знавши въ двухъ количествахъ, что сумма ихъ составляетъ 57, а разность 17, заключаю о сихъ количествахъ, что они должны быть 37 и 20, прикладывая съ одной стороны половину 17 ти къ половинѣ 57 ми, а съ другой отнимая половину 17 ти отъ половины 57 ми.

Ибо когда сумма заключаетъ въ себѣ большое количество съ меньшимъ, то ежели къ сей суммѣ прибавится еще разность, въ такомъ случаѣ она будетъ уже содержать двойное большое количество; слѣд. большое количество равно половинѣ всего сего, то есть половинѣ суммы двухъ количествъ съ половиною разности ихъ Напротивъ ежели отъ суммы отнимется разность, то въ остаткѣ будетъ двойное меньшое количество; и слѣд. меньшое равняется половинѣ суммы безъ половины разности.

306. *Ежели изъ какого нибудь угла всякаго прямолинѣйнаго треугольника* ABC (фиг. 154 и 155) *опустится на противоположенной бокъ перпендикуляръ; то происходитъ всегда слѣдующая пропорція: б къ* AC, *на которой или на продолженіе котораго падаетъ перпендикуляръ, содержится къ суммѣ*

AB + CB *двухъ прочихъ боковъ, какъ разность* AB — CB *тѣхъ же боковъ къ разности отрѣзковъ* AD *и* DC *или къ суммѣ ихъ, смотря потому внутрь или внѣ треугольника упадаетъ перпендикуляръ.*

Опиши изъ точки B, какъ изъ центра, радіусомъ равнымъ боку BC, окружность CEGF и продолжи бокъ AB, пока онъ пересѣчетъ ее въ E. Тогда AE и AC будутъ два секанса, проведенные изъ одной точки, взятой внѣ круга; и такъ по объявленному (123) будетъ служить сія пропорція AC : AE = AG : AF.

Но AE равно AB + BE или AB + BC, AG равно AB — BG или AB — BC; и AF (*фиг.* 154) равно AD — DF или (53) AD — DC; почему AC : AB + BC = AB — BC : AD — DC. А въ *фигурѣ* 55, какъ AF равно AD + DF или AD + DC, будетъ AC : AB + BC = AB — BC : AD + DC.

307. И такъ знавши три бока въ треугольникѣ, можно по сей пропорціи опредѣлить также, какіе сдѣлаетъ отрѣзки перпендикулярная линѣя, опущенная изъ какого нибудь угла на противоположенной ему бокъ; ибо *въ фигурѣ* 154 сумма AC отрѣзковъ извѣстна, почему нашедши по показанной

пропорціи, вЂ которой три первые члена извѣстны, разность ихЂ, потомЂ удобно опредѣлить можешь каждой отрѣзокЂ по объявленному ( 305 ). ВЂ *фигурѣ* же 155 по извѣстной разности отрѣзковЂ AD и CD, которая есть самой бокЂ AC, пропорція опредѣлитЂ величину ихЂ суммы.

308. Помощію сего правила не трудно рѣшить слѣдующій вопросЂ.

*По даннымЂ тремЂ бокамЂ треугольника опредѣлить углы его.*

Опустивши изЂ какого нибудь угла перпендикулярЂ, получишь два прямоугольные треугольника ADB, CDB.

Найди по предыдущей пропорціи какой нибудь отрѣзокЂ, на примѣрЂ DC; потомЂ вЂ прямоугольномЂ треугольникѣ CDB по извѣстнымЂ двумЂ бокамЂ BC и CD удобно сыщется по сказанному ( 299 ) уголЂ C.

ПРИМѢРЪ. *Даны бокЪ AB 142 футовЪ, бокЪ BC 64, и бокЪ AC 184; спрашивается какой величины будетЪ уголЪ C.*

Нахожу разность отрѣзковЪ AD и DC по сей посылкѣ, 184 : 142 + 64 = 142 — 64 : AD — DC, или 184 : 206 = 78 : AD — DC; она равняется 87ф, 32, почему меньшой отрѣзокЪ CD будетЪ ( 305 ) равенЪ половинѣ 184 безЪ половины 87, 32; то есть 48, 34.

Послѣ сего въ прямоугольномъ треугольникѣ CDB сыскиваю уголъ CBD, а по немъ нахожу уголъ C; сыщется же уголъ CBD посылкою (299) BC : CD = R : *син.* CBD, то есть 64 : 48, 34 = R : *син.* CBD.

Въ логариѳмахъ.

| | |
|---|---|
| Лог. 48, 34 . . . . . . . . . . . . . | 1,6843066 |
| Лог. радіуса . . . . . . . . . . . . | 1 . . . . |
| Ариѳ. допол. лог. 64 . . . . . . . . | 8,1938200 |

Сумма или лог. *син.* CBD . . . 19,8781266 которой въ таблицахъ отвѣчаетъ 49° 3′; слѣд. уголъ C есть 40° 57′.

309. *Во всякомъ прямолинѣйномъ треугольникѣ сумма двухъ какихъ нибудь боковъ его содержится къ разности ихъ, какъ тангенсъ половиной суммы двухъ угловъ, противоположенныхъ тѣмъ бокамъ, къ тангенсу половинной ихъ разности.*

Ибо по объявленному (303) будетъ (*фиг.* 156) AB : *син.* C = AC : *син.* B; и (97) AB + AC : AB — AC = *син.* C + *син.* B : *син.* C — *син.* B; но (288) *син.* C + *син.* B : *син.* C — *син.* B = *танг.* $\frac{C+B}{2}$ : *танг.* $\frac{C-B}{2}$; слѣд. AB + AC : AB — AC = *танг.* $\frac{C+B}{2}$ : *танг.* $\frac{C-B}{2}$.

310. Сія пропорція служитъ *къ рѣшенію треугольника, въ которомъ извѣст-*

*ны два бока и уголъ, заключающійся между тѣми боками.*

Ибо естьли будетъ данъ уголъ A на примѣръ, то найдется сумма двухъ угловъ B и C, когда вычтешь уголъ A изъ 180°. такимъ образомъ пріискавши въ таблицахъ тангенсъ половины сего остатка, будешь имѣть съ данными двумя боками AB и AC три извѣстные члена въ доказанной теперь пропорціи; а по нимъ сыщется четвертый, которой покажетъ половинную разность двухъ угловъ B и C. Узнавши же половинную сумму и половинную разность сихъ угловъ, сыщется большой уголъ (305), когда половинную сумму сложишь съ половинною разностію; а меньшой, когда половинную разность вычтешь изъ половинной суммы. Напослѣдокъ при извѣстныхъ сихъ углахъ сыщется и третій бокъ по пропорціи, показанной (303).

ПРИМѢРЪ. *Положимъ, что бокъ* AB *данъ* 142 *футовъ, бокъ* AC 120 *и уголъ* A 48°. *спрашивается величина двухъ угловъ* C *и* B *и бока* BC.

Вычитаю 48° изъ 180°, остатокъ 132° будетъ равенъ суммѣ двухъ угловъ C и B, и слѣд. 66° половинѣ суммѣ ихъ.

Посылаю $142 + 120 : 142 - 120 =$ *танг.* $66^\circ :$ *танг* $\frac{C - B}{2}$, или $262 : 22 =$ *танг.* $66^\circ :$ *танг.* $\frac{C - B}{2}$.

ВЪ логариѳмахЪ.

| | |
|---|---|
| Лог. *танг.* 66° . . . . . . . . . . . . | 10,3514169 |
| Лог. 22 . . . . . . . . . . . . . . . . | 1,3424227 |
| Ариѳ. допол. лог. 262 . . . . . . . . . | 7,5816987 |
| Сумма или лог. *танг* половин. разности | 19,2755383 |

которой вЪ таблицахЪ отвѣчаетЪ 10° 41′.

СложивЪ половинную сїю разность сЪ полсуммою и вычетши ее изЪ тойже полсуммы, буду имѣть какЪ слѣдуетЪ:

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 66°, 0′ | | 66° 0′ |
| | 10°, 41′ | | 10°, 41′ |
| УголЪ C . . . . . | 76° 41′ | УголЪ B . . . | 55° 19′ |

НапослѣдокЪ сыскиваю бокЪ BC по сей пропорцїи, *син.* C : AB = *син.* A : BC; то есть *син.* 76° 41′ : 142ф = *син.* 48° : BC.

И производя рѣшенїе по предыдущимЪ примѣрамЪ найдется BC 108 ф, 4.

311. Таковы суть средства, употребляемыя при рѣшенїи треугольниковЪ : послѣдующїя же задачи будутЪ служить примѣрами для сложнѣйшихЪ фигурЪ.

312. *ПоложимЪ, что требуется узнать разстоянїе между двумя предметами* C и D (фиг. 157), *кЪ которымЪ подойти не можно.*

Вымѣряй разстоянїе AB, изЪ крайнихЪ точекЪ котораго можно былобы видѣть оба тѣ предметы C и D. При станцїи A вымѣряй углы CAB, DAB, которыя линѣя AB составляетЪ сЪ линѣями AC, AD, умственно продолженными отЪ A кЪ предметамЪ C и D; равнымЪ образомЪ при станцїи B найди углы CBA, DBA.

Послѣ сего, узнавши въ треугольникѣ CBA два угла CAB, CBA и бокъ AB, сыщется бокъ AC (303). Равнымъ образомъ въ треугольникѣ ADB по извѣстнымъ двумъ угламъ DAB, DBA и боку AB, опредѣлится бокъ AD. Наконецъ вообразивъ линѣю CD, получишь треугольникъ CAD, въ которомъ найдены два бока AC, AD и уголъ CAD, заключающїйся между тѣми боками, извѣстенъ, понеже уголъ сей есть разность между вымѣренными двумя углами CAB, DAB; слѣд. (310) сыщется и бокъ CD.

313. Тѣмъ же способомъ можно узнать склоненїе линѣи CD, хотябы къ ней приближиться было не можно; ибо въ треугольникѣ CAD можно найти уголъ ACD, которой составляютъ линѣи CD, AC; но по проведенїи умственной линѣи CZ параллельно къ AB, явствуетъ, что уголъ ACZ будетъ дополненїемъ угла CAB по причинѣ тѣхъ параллельныхъ линѣй (40); и такъ сыскавши разность извѣстнаго угла ACZ съ найденнымъ угломъ ACD, получишь уголъ DCZ, которой составляютъ ED съ CZ или съ ея параллельною AB; а какъ не трудно узнать склоненїе AB, слѣд. легко сыщется послѣ того и склоненїе CD.

314. Разсуждая о линѣяхъ обѣщали мы показать способъ, *какъ опредѣлять различныя точки прямой линѣи, когда за препятствїемъ, въ серединѣ находящимся не можно видѣть предѣловъ ихъ*; вотъ какъ въ семъ случаѣ поступать должно.

Выбери точку C (*фиг.* 158) внѣ предложенной линѣи AB такую, откуда видѣть можно границы A и B; вымѣряй разстоянїя AC и CB не посредственно или производя треугольники, коихъ сїи линѣи сдѣлаются боками, и которыя найдутся по предыдущему примѣру.

Такимъ образомъ въ треугольникѣ ACB узнавши два бока AC и CB и уголъ, лежащїй между тѣми боками ACB, сыщется (310) уголъ BAC.

Послѣ сего поставивши нѣсколько кольевъ въ какомъ угодно направленiи CD, и вымѣрявъ уголъ ACD, въ треугольникѣ ACD по извѣстнымъ двумъ угламъ A и ACD и боку AC, сыщется (304) бокъ CD; тогда продолжая ставить колья въ направленiи CD до тѣхъ поръ, пока опредѣлится длина равная сысканной, и точка D, гдѣ кончится сiя длина, будетъ въ прямомъ положенiи съ точками A и B.

315. Когда же не льзя найти такой точки C, изъ которой можно видѣть обѣ точки вмѣстѣ A и B; въ такомъ случаѣ надлежитъ поступать слѣдующимъ образомъ.

Сыщи точку C (*фиг.* 159), откуда можно было бы видѣть B, и другую точку E, изъ которой были бы въ виду A и C. По томъ опредѣливъ какимъ нибудь показаннымъ способомъ разстоянiе AE, EC и CB, вымѣряй также при точкѣ E уголъ AEC, и при точкѣ C уголъ ECB.

По совершенiи сего въ треугольникѣ AEC по извѣстнымъ двумъ бокамъ AE, EC и углу, между ими лежащему AEC, опредѣлятся (310) бокъ AC и уголъ ECA.

Вычти уголъ ECA изъ вымѣреннаго угла ECB, получишь уголъ ACB; а понеже AC найдена и CB вымѣрена, почему поступая по предыдущему такъ, какъ бы обѣ точки A и B были видны изъ точки C, кончится рѣшенiе тѣмъ же самымъ способомъ.

316. Изъ сихъ же правилъ явствуетъ, какъ должно *въ фигурѣ* 160 сдѣлать батарею на продолженiи куртины AB.

317. *Вымѣрять неприступную высоту, на пр. высоту горы* (фиг. 161).

Выбери двѣ станцiи въ F и G, изъ которыхъ можно видѣть высоту горы A; по томъ астролабiею, которой линѣи BF и CG показываютъ высоту, вымѣряй углы ABC, ACB, кои съ основанiемъ составляютъ умственно проведенныя изъ A къ

В и С линѣи ВА, СА; наконецъ въ какой нибудь станціи на примѣръ въ С расположивъ астролябію, какъ было показано въ примѣрѣ, относящемся къ фигурѣ 146, вымѣряй уголъ ACD, которой ничто другое есть, какъ наклоненіе линѣи АС къ горизонту; такимъ образомъ въ треугольникѣ АСВ по извѣстнымъ двумъ угламъ АВС, АСВ и боку ВС, удобно сыщется (304) бокъ АС; въ треугольникѣ ADC по найденному теперь только боку АС, вымѣренному углу ACD и углу прямому D, понеже AD есть высота перпендикулярная, найдется AD, то есть высота точки А въ разсужденіи точки С. Когда же потребуется узнать высоту А въ разсужденіи точки В, или въ разсужденій всякой другой точки близъ ней лежащей, въ такомъ случаѣ нужно сдѣлать *уравненіе* или сыскать разность высотъ, находящуюся между точками С и В; но о семъ будемъ говорить ниже.

318. *Пусть* А,В,С (фиг. 162) *будутъ извѣстныя точки, то есть между коими находящіяся разстоянія и углы извѣстны; требуется сдѣлать батарею внѣ сихъ трехъ точекъ такимъ образомъ, чтобъ изъ точки* D *гдѣ построится батарея, видны были бока* АВ *и* ВС *подъ извѣстными углами; спрашивается положеніе точки* D.

Вообрази кругъ, окружность котораго бы захватила три точки А, С и D, по томъ представь въ умѣ прямую линѣю DBF съ двумя хордами AF и CF.

И такъ въ треугольникѣ AFC, котораго извѣстны АС, уголъ FAC равный FDC и уголъ FCA равный FDA, можно найти FC и FA (304).

Въ треугольникѣ FBC по извѣстнымъ FC, ВС и углу FCB, состоящему изъ угла FCA равнаго FDA и даннаго угла АСВ, сыщется (310) уголъ CBF, которому дополненіемъ служитъ CBD.

Напослѣдокъ въ треугольникѣ CBD по извѣстнымъ боку СВ, углу CBD и углу BDC, найдется удобно DC; такимъ же образомъ поступая, най-

дешъ AD посредствомъ треугольниковъ AFC, ABF и ABD.

Ежели сумма двухъ вымѣренныхъ угловъ ADB, BDC найдется равна углу ABC или его дополненію, въ такомъ случаѣ задача будетъ не опредѣленна, или должна имѣть безчисленное множество рѣшеній, и точка B не въ иномъ мѣстѣ, какъ на окружности будетъ находиться.

Между примѣрами, которые могутъ служить начинающимъ упражняться въ Тригонометрической практикѣ, за нужное почитаемъ показать выкладку линѣй и угловъ правильнаго укрѣпленія на пр. въ пятіугольникѣ, расположенномъ по первому способу Г. Вобана.

Пусть будутъ даны наружной бокъ AB (*фиг.* 163) 180 тоазовъ, перпендикуляръ CD 30 тоазовъ, фасы бастіона AE, BF 50 тоазовъ. Ширина AG рва противъ угла бастіона или радіусъ дуги контрескарпа 18 тоазовъ, капиталь HI равелина 55 тоазовъ, разстояніе ET отъ плечнаго угла до пересѣченія T фасомъ QI равелина 3 тоаза.

И такъ въ треугольникѣ ACD прямоугольномъ въ C, по извѣстнымъ AC и CD, можно найти (300) углы DAC, ADC и бокъ AD (166); по углу BAC будутъ извѣстны равные ему углы DBC, ELK, FKL; по тому же углу DAC, сравненному съ половиною внутренняго угла пятіугольника, сыщется половина угла бастіона VAE.

Когда извѣстны AD и AE, то будутъ также извѣстны DE и равная ей DF; такимъ образомъ въ треугольникѣ ADF по найденнымъ AD и DF и углу ADF вдвое больше ADC, сыщутся (310) углы DFA, DAF и бокъ AF; а какъ въ семъ строеніи треугольникъ AFL есть равнобедренный, то два угла ALF и AFL удобно быть могутъ извѣстны. Сложивъ первый изъ сихъ угловъ съ угломъ KLE равнымъ DAC, получишь уголъ KLF куртины. Когда же вычтется сысканной уголъ AFD изъ угла AFL, въ остаткѣ будетъ

уголъ KFL, коего дополненїе LFB есть плечной уголъ.

Ежели изъ AL равной AF вычтешь AD, тогда получишь DL; по томъ по причинѣ подобїя треугольниковъ ADB, KDL, найдется KL или куртина.

Въ треугольникѣ KLF, коего всѣ углы извѣстны и бокъ KL, удобно сыщутся (304) KF и LF.

Изъ KF вычти FD, получишь KD; послѣ чего въ прямоугольномъ треугольникѣ KMD по извѣстнымъ KD, KM, сыщется (166) MD. Слѣд. найдется также и MC.

Въ треугольникѣ AOC (вообразивъ, что O есть центръ полигона) по извѣстнымъ AC и всѣмъ угламъ, удобно вычислить можно AO и OC (299 и 300).

Въ прямоугольномъ треугольникѣ AGF по извѣстнымъ AF и AG, сыщется уголъ FAG (299), которой сложивъ съ FAD и DAO, получишь дополненїе GAN.

И такъ знавши GAN, найдешь дополненїе его ANG или ONH; послѣ чего въ треугольникѣ ONH, котораго уголъ NOH извѣстенъ, удобно сыщется уголъ NHO и слѣд. дополненїе его QHI.

Въ прямоугольномъ треугольникѣ NAG, легко можно узнать AN, которую сложивъ съ AO получишь ON; въ треугольникѣ ONH по извѣстному боку ON и всѣмъ угламъ найдется OH; OH вычти изъ OC, остатокъ покажетъ CH; а по извѣстной HI сыщется CI. Сложи CI съ CD, получишь DI въ треугольникѣ TDI, въ которомъ сверьхъ того извѣстны DT или DE + ET и уголъ TDI; слѣд. можно (310) опредѣлить уголъ DIT или HIQ треугольника HIQ, въ которомъ будутъ теперь извѣстны HI и уголъ QHI. Почему въ треугольникѣ семъ QHI удобно вычисленна быть можетъ демигоржа QH, и фасъ QI равелина QIP.

## *О Способахъ Тригонометрическихъ, употребляемыхъ при снятіи и черченіи Плановъ.*

319. Искуство чертить планы состоитъ въ опредѣленіи на бумагѣ точекъ такъ, какъ расположены на землѣ предметы, которые тѣ точки должны представлять. Въ семъ случаѣ предполагается, что всѣ предметы лежатъ въ одной горизонтальной плоскости; когдажъ того не находится, то есть, когда дѣйствія, употребленныя къ опредѣленію положеній предметовъ, не были произведены въ одинакой горизонтальной плоскости, тогда не прежде приступай къ черченію плана, какъ по приведеніи наблюденій своихъ въ такое положеніе, какъ бы они произведены были въ горизонтальной плоскости.

Мы сначала покажемъ, какъ должно поступать съ наблюденіями, сдѣланными въ горизонтальной плоскости или приведенными въ такое положеніе; а потомъ скажемъ о способѣ приводить ихъ въ оное.

Пусть A, B, C, D, E, F, G, H, I, K (*фиг.* 163) будутъ многіе примѣчанія достойные предметы, которыхъ положенія требуется представить на планѣ.

Назначь сначала какъ нибудь на бумагѣ предметы въ такомъ видѣ, какъ они глазамъ твоимъ представляются, переходя въ различныя мѣста, откуда можно обозрѣвать ихъ: сей первой рисунокъ послужитъ къ наблюденію разныхъ мѣръ, которыя производить должно въ продолженіи рѣшенія.

Вымѣряй основаніе AB соразмѣрной длины разстоянію отдаленныхъ предметовъ, которые видѣть можно изъ конечныхъ точекъ его; сіи точки должны расположены быть такъ, чтобъ изъ нихъ сколько можно больше находилось въ виду разныхъ предметовъ. Потомъ Астролабіею вымѣряй при точкѣ A углы EAB, FAB, GAB, CAB, DAB, которые составляютъ при A съ основаніемъ AB, линѣи умственно проведенныя отъ той точки A къ предметамъ E, F, G, C, D, предположивъ, что они въ виду находятся изъ концовъ A и B основанія; такимъ же образомъ вымѣряй при B углы EBA, FBA, GBA, CBA, DBA, которые составляютъ съ AB линѣи умственно проведенныя изъ B къ тѣмъ же самымъ предметамъ.

Естьли найдутся предметы, какъ на пр. H, I, коихъ не можно было видѣть изъ конечныхъ точекъ A и B; въ такомъ случаѣ должно перейти въ другія два изъ наблю-

денныхъ мѣстъ E и F такія, откуда бы можно было видѣть сіи предметы H и I; тогда принявъ EF за основаніе, вымѣряй углы HEF, IEF, HFE, IFE, которые составляютъ съ симъ новымъ основаніемъ линѣи, простирающіяся отъ концовъ E и F къ предметамъ H и I. Наконецъ ежели еще найдется какой ни есть предметъ, какъ на пр. K, котораго не можно было видѣть ни изъ концовъ AB ни изъ концовъ основанія EF; для сего избери основаніемъ какую нибудь третію линѣю, на пр. FG, и вымѣряй изъ концовъ ея показаннымъ образомъ углы KFG, KGF.

По совершеніи сего, въ треугольникахъ ACB, ADB, AEB, AFB, AGB, изъ которыхъ въ каждомъ извѣстны бокъ AB, и два при семъ боку лежащіе угла, удобно сысканы быть могутъ (304) прочіе ихъ два бока.

Что касается до треугольниковъ HEF, IEF, то какъ въ нихъ вымѣрены только были углы при концахъ линѣи EF, надлежитъ сперва найти сію линѣю EF посредствомъ треугольника EAF, въ которомъ извѣстны уголъ EAF, разность между вымѣренными углами EAB, FAB, и боки AE, AF по сдѣланной выше выкладкѣ: слѣд. найдется (310) EF; послѣ чего въ каждомъ изъ

треугольниковъ HEF, IEF, узнавши бокъ EF и два угла при немъ лежащіе, сдѣлай такую же выкладку для двухъ прочихъ угловъ, какую дѣлалъ въ первыхъ треугольникахъ; тѣмъ же способомъ рѣшится и треугольникъ KFG.

По окончаніи сихъ выкладокъ, проведи (*фиг.* 164) на бумагѣ линѣю *ab*, которую сдѣлай равную столькимъ частямъ по маштабу, долженствующему опредѣлить желаемую величину плана, сколько найдено сажень или футовъ въ линѣи AB; по томъ опредѣли какую нибудь изъ примѣченныхъ точекъ въ концахъ AB основанія, на пр. точку E, взявши на маштабѣ столько частей, сколько по выкладкѣ вышло саженъ или футовъ для линѣи AE, и изъ точки *a*, какъ центра, радіусомъ *ae* равнымъ числу тѣхъ частей опиши дугу. Равнымъ образомъ взявши съ маштаба столько частей, сколько содержитъ сажень или футовъ BE, изъ точки *b*, какъ центра, радіусомъ равнымъ числу тѣхъ частей, пересѣки первую дугу, описанную радіусомъ *ae* въ точкѣ *e*, которая представитъ на бумагѣ положеніе точки *e* въ разсужденіи *ab* точно такое, какое E представляетъ въ разсужденіи AB; ибо по сочиненію сему бока треугольника *aeb* будутъ пропорціональны бокамъ треугольника AEB; почему онъ ему

подобенъ: такимъ же образомъ поступая, опредѣлишь точки *f*, *g*, *c*, *d*, долженствующія представлять тѣ же положенія, какія представляютъ точки F, G, C, D.

Что касается до точекъ *h*, *i*, *k*, долженствующихъ представлять предметы H, I, K, которые не были видны изъ A и B; то по опредѣленіи точекъ *e*, *f*, *g* показаннымъ образомъ, линѣи *ef* и *fg* будутъ служить основаніемъ, такъ какъ прежде *ab* служила для *c*, *d*, *e*, *f*, *g*; почему дѣйствіе рѣшенія будетъ состоять въ томъ же, чтобъ радіусами *he*, *hf*, содержащими столько частей по машпабу, сколько найдено по выкладкѣ сажень или футовъ въ HE и HF, описать дуги, коихъ пересѣченіе *h* покажетъ точку H; равнымъ образомъ другія пересѣченія означутъ прочія точки. Тогда фигура, начерченная на бумагѣ, будетъ подобна фигурѣ того мѣста земли, съ котораго былъ снятъ планъ (128), ибо она будетъ состоять изъ одного числа треугольниковъ подобныхъ, и сходственно расположенныхъ; напослѣдокъ ничего больше не остается дѣлать, какъ изобразить при каждой точкѣ примѣченные предметы, промежутки же не столь важные и не заслуживающіе особеннаго вниманія означутся способами, о которыхъ ниже упомянемъ.

## *О способѣ приводить Углы, вымѣренные въ плоскостяхъ, наклоненныхъ къ горизонту, въ такие, какъ бы всѣ предметы были видимы въ одной горизонтальной плоскости.*

320. Когда въ наблюденіяхъ предыдущаго рѣшенія предметы не будутъ лежать всѣ въ одной горизонтальной плоскости, тогда не прежде надлежитъ приступать къ черченію плана, какъ по приведеніи угловъ въ такое положеніе, въ какомъ должны бы они быть, естьли бы всѣ предметы находились въ одномъ горизонтѣ: и вотъ какимъ образомъ сіе сдѣлается.

Пусть A, B, C (*фиг.* 165) будутъ три точки, изъ которыхъ каждая лежитъ различно выше горизонта, на примѣръ положимъ, что высоты ихъ представляютъ AD, BF, CE; слѣд. FDE служитъ горизонтомъ: уголъ BAC вымѣренъ; но какъ плоскость, къ которой относятся сіи предметы есть FDE, то вообразивъ, что B находится въ F, A въ D, и C въ E, требуется узнать уголъ FDE.

Въ станціи, гдѣ будешь вымѣрять уголъ BAC, вымѣряй также углы BAD, CAD, которые составляютъ умственныя линѣи AB,

АС съ перпендикуляромъ; упадающимъ изъ А къ горизонту, что учинено быть можетъ по изъясненному способу въ примѣрѣ, относящемся къ *фиг.* 146 на *страницѣ* 233.

Послѣ чего представь, что AB и AC продолженныя, естьли нужда того потребуетъ, сходятся съ горизонтальною плоскостью FDE въ точкѣ G и I; въ треугольникахъ ADG, ADI, прямоугольныхъ въ D, принявъ AD за цѣлой синусъ; DG и DI будутъ тангенсы вымѣренныхъ угловъ GAD, IAD, а AG, AI секансы ихъ; и такъ пріискавъ въ таблицахъ тангенсы и секансы угловъ GAD, IAD, узнаешь 1е. въ треугольникѣ GAI бока GA, AI; а по симъ бокамъ и вымѣренному углу GAI можешь (310) найти бокъ GI. 2е. Въ треугольникѣ GDI, по извѣстнымъ бокамъ GD, DI и сысканному боку GI, сдѣлай выкладку (308) для угла GDI.

Равнымъ образомъ поступая, приведи вымѣренный уголъ при точкѣ B; а по приведеніи въ треугольникѣ двухъ угловъ въ горизонтальное положеніе, не нужно болѣе дѣлать выкладки для третьяго, потому что по извѣстнымъ двумъ угламъ треугольника, третій самъ собою означится.

По приведенiи угловъ не трудно уже будетъ привести въ горизонтальное положенiе всѣ разстоянiя или одно (потому что въ треугольникѣ довольно и одного). Ибо представивъ горизонтальную линѣю BO въ треугольникѣ BAO, прямоугольномъ во O, по извѣстнымъ частямъ его BA, которая вымѣрена, углу прямому и углу BAO, удобно (299) сыщутся BO или FD.

### ПРИМѢРЪ.

Положимъ, что мы сыскали уголъ BAC 62° 37′; уголъ BAD 88° 5′ и уголъ CAD 78° 17′; прiискиваю въ таблицахъ секансы и тангенсы угловъ BAD и CAD, и пишу ихъ съ отнятiемъ у нихъ послѣднихъ трехъ цыфръ.

| | | |
|---|---|---|
| *Сек.* | 88° 5′ или AG . . . . . . . . . | 29,90 |
| *Сек.* | 78° 17′ или AI . . . . . . . . . | 4,92 |
| *Танг.* | 88° 5′ или DG . . . . . . . . . | 29,88 |
| *Танг.* | 78° 17′ или DI . . . . . . . . . | 4,82 |

Тогда въ треугольникѣ AGI, нахожу (310) половину разности двухъ угловъ AGI, AIG по сей посылкѣ, $AG + AI : AG - AI =$ *тан.* 58° 41′ половины суммы двухъ угловъ къ тангенсу половинной разности; она состоитъ изъ 49° 42′, почему уголъ AGI будетъ 8° 59′; послѣ чего (304) GI найдется 27, 98.

По извѣстнымъ тремъ бокамъ DG, DI, GI сыщется (308) уголъ GDI 62° 27′.

Ежели случится, что таблицы не содержатъ секансовъ, въ такомъ случаѣ весьма удобно они сысканы быть могутъ по предписаннымъ правиламъ (282).

## *О Способахъ, служащихъ дополненiемъ Тригонометрiи при снятiи Плановъ.*

321. Тригонометрическiя выкладки бываютъ необходимо нужны, когда главные

предметы пространства, съ котораго потребуется снять планъ, находятся между собою въ довольно великомъ разстояніи.

Когда же разстоянія сіи бываютъ посредственны, то вымѣрявъ основаніе и углы, какъ было показано (319), вмѣсто того чтобъ чертить на бумагѣ треугольники подобные тѣмъ, которые были вымѣрены на землѣ, посредствомъ выкладки боковъ ихъ, взятыхъ по маштабу, можно довольствоваться одними вымѣренными углами, такъ какъ слѣдуетъ.

Способъ сей бываетъ не столько исправенъ какъ предыдущій, потому что транспортиръ или вообще всякой другой инструментъ, служащій къ черченію на бумагѣ угловъ равныхъ тѣмъ, которые вымѣрены на землѣ, имѣя весьма малой радіусъ, не можетъ удовлетворить той точности, какую можно сыскать, бравши по маштабу величину боковъ опредѣленною выкладкою.

Но какъ весьма рѣдко случается нужда въ строгой точности, притомъ же переноска угловъ на бумагу производится удобнѣе и скорѣе, почему сей послѣдній способъ сдѣлался весьма употребителенъ и почитается

за довольно исправной. Онъ состоитъ въ слѣдующемъ: проведи линѣю *ab* (*фиг.* 164), равную по маштабу плана столькимъ частямъ, сколько вымѣрено въ AB; потомъ при крайнихъ точкахъ *a*, *b* сдѣлай углы *eab*, *eba* *fab*, *fba* и проч. равные вымѣреннымъ угламъ EAB, EBA FAB, FBA и проч. которые составляетъ основаніе съ предметами, примѣченными изъ A и B. Наконецъ соединивъ точки *e* и *f* прямою линѣею *ef*, начерти при концахъ сей линѣи *ef*, какъ при основаніи углы, равные тѣмъ, которые вымѣрены при E и F, и такъ далѣе.

322. Можно также обойтись безъ тригонометрической выкладки при приведеніи угловъ, вымѣренныхъ въ наклоненной плоскости, въ горизонтальное положеніе. И вотъ тому способъ.

Положимъ, что тѣжъ самыя наблюденія сдѣланы, какія въ (320) для *фигуры* 165; и такъ при точки A (*фиг.* 166) какой нибудь линѣи AD сдѣлай углы DAG, DAI, равные вымѣреннымъ вертикальнымъ угламъ DAG, DAI *фигуры* 165; чрезъ точку D *фиг.* 166, произвольно взятой на AD, проведи къ сей линѣѣ перпендикуляръ IDG не опредѣленной величины. Изъ A продолжи линѣю AM, составляющую съ AI уголъ

IAM равной углу BAC, которой требуется сдѣлать горизонтальнымъ, и положивъ AM равную AG, соедини точки I и M линѣею IM. Напослѣдокъ изъ точки I, какъ изъ центра, радіусомъ IM, и изъ точки D радіусомъ DG засѣки дуги, пересѣкающіяся въ O; отъ чего уголъ IDO будетъ желаемый.

## *О Компасѣ и его употребленіи.*

323. *Компасъ* есть круглая мѣдная или деревянная коробочка (*фиг.* 167), внутри которой на остроконечномъ спицѣ, утвержденномъ по серединѣ, накладывается стальная, магнитомъ натертая стрѣлка, имѣющая свободное обращеніе на томъ спицѣ. Нижній кругъ коробочки раздѣляется на 360 градусовъ, а въ верхнемъ кругѣ ея или ободочкѣ при раздѣленіяхъ 180° и 360°, или при линѣѣ, параллельно проходящей чрезъ сіи два раздѣленія, вставливаются два діоптра.

324. Употребленіе компаса основывается на свойствѣ магнитной стрѣлки, которая постоянно наблюдаетъ одинакое положеніе, или обращается опять къ нему, будучи отведена (по крайней мѣрѣ въ одномъ мѣстѣ и въ продолженіи довольнаго времени). Изъ сего явствуетъ, что при обращеніи

компасной коробочки можно судить о томъ количествѣ, на какое она повернется, сравнивая точку раздѣленія градусовъ, въ которой стрѣлка остановится, съ тою, въ которой она прежде стояла.

325. Компасъ по большой части накладывается на Астролабію, и служитъ къ показанію положенія предметовъ въ разсужденіи четырехъ странъ свѣта или въ разсужденіи полуденной линѣи, съ которою магнитная стрѣлка составляетъ всегда одинъ уголъ въ одномъ мѣстѣ и въ продолженіи почти цѣлаго года.

326. Компасъ можетъ служить самъ по себѣ къ измѣренію угловъ подобно Астролабіи; но какъ нѣкоторыя причины не позволяютъ сдѣлать довольной длины для магнитной стрѣлки, почему градусы занимая въ раздѣленіяхъ весьма малое пространство, не могутъ вымѣрять угловъ съ такою точностію, какъ Астролабія: и для того компасъ употребляется только къ показанію на планѣ румбовъ, или склоненія линѣй отъ полуденной линѣи при главныхъ точкахъ, означенныхъ предыдущими способами.

327. Пусть для примѣра требовалось бы снять планъ съ теченія рѣки; воткни

колья при поворотахъ ея A, B, C, D, E, F, (*фиг.* 168), и поставивъ компасъ въ точкѣ A такъ, чтобъ діоптры были направлены по линѣи AB, сочти на раздѣленіяхъ число градусовъ, заключающееся между линѣею AB и склоненіемъ стрѣлки, по томъ смѣряй AB. Послѣ сего поставивъ компасъ въ точкѣ B, направь діоптры по линѣи BC, и замѣть уголъ, которой дѣлаетъ BC съ BN склоненіемъ стрѣлки, параллельнымъ первому направленію AN, вымѣряй BC; наконецъ поступай равнымъ образомъ при каждомъ поворотѣ. Вымѣрявши всѣ углы и разстоянія, перенеси ихъ на бумагу слѣдующимъ образомъ:

Возьми по изволенію точку *a* (*фиг.* 169), долженствующую представлять точку A, и проведи произвольно линѣю *an* для изображенія склоненія магнитной стрѣлки. При *a* сдѣлай транспортиромъ уголъ *nab* равный вымѣренному углу NAB, и положи по машшабу *ab* равную столькимъ частямъ, сколько найдено мѣръ въ растояніи AB. У точки *b* проведи *bn* параллельную съ *an*, сдѣлай уголъ *nbc* равный NBC, возьми съ машшаба для *bc* столько частей, сколько мѣръ сыскано въ BC. Равнымъ образомъ поступай при прочихъ точкахъ; послѣ чего изо-

бразы предметы, какъ они глазамъ твоимъ представлялись.

Что сказано о изгибахъ рѣки, тоже разумѣть должно о поворотамъ дороги, объ окруженіи лѣсовъ и болотъ.

## *О Геометрическомъ Столикѣ и его употребленіи.*

328. При снятіи плановъ употребляется еще другой способъ, которой почитается тѣмъ способнѣе, что не требуетъ многихъ принадлежностей, и съ помощію котораго можно чертить на бумагѣ различные предметы вдругъ, не выпуская ихъ изъ виду. Инструментъ, служащій для сего дѣйствія, представленъ *фигурою* 170. ABCD есть четвероугольная доска, которая имѣя длиннику отъ 16 до 18 дюймовъ, и поперешнику почти столько же, поддерживается штатифомъ, какъ Астролабія. На поверхность столика полагается листъ бумаги, которой прикрѣпляется по краямъ рамкою. LM представляетъ линѣйку, снабженную по концамъ діоптрами, расположенными параллельно между собою.

Снимается планъ посредствомъ сего инструмента, называемаго *Геометрическимъ столикомъ*, слѣдующимъ образомъ: возь-

ми, какъ въ предыдущихъ рѣшеніяхъ было показано, растояніе *mn*, и поставивъ столикъ въ *m*, прикажи воткнуть колъ въ *n*; положи линѣйку на бумагу и направивъ ее, смотря сквозь діоптры, прямо на колъ *n*, проведи линѣю EF, которую сдѣлай по маштабу равную разстоянію *mn*. По томъ поворачивая линѣйку около точки E, наводи ее попеременно на предметы I, H, G, и при каждомъ направленіи проведи на бумагѣ линѣи неопредѣленной величины. По продолженіи такимъ образомъ линѣй изъ точки *m* ко всѣмъ въ виду находящимся предметамъ, перенеси столикъ въ *n*, оставивъ въ точкѣ *m* колъ, и производи въ сей станціи тѣ же самыя дѣйствія относительно къ предметамъ I, H, G, какъ и въ первой. Точки *g*, *h*, *i*, гдѣ линѣи *fi*, *fh*, *fg*, продолженныя во второмъ случаѣ къ предметамъ, пересѣкутъ первыя линѣи, будутъ представлять оные предметы G, H, I.

329. Геометрической столикъ употребляется особенно или для показанія странъ свѣта мѣсту, котораго главные предметы назначены на планѣ исправно по предыдущимъ способамъ, или для дополненія на картѣ опущенныхъ предметовъ.

Пусть для примѣра точки A, B, C (*фиг.* 171) были бы опредѣлены и назначе-

ны на картѣ въ *a*, *b*, *c*, точки же D положеніе неизвѣстно; то вотъ какимъ образомъ она опредѣлится посредствомъ столика. Поставь столикъ въ точку D, и означь на немъ страны свѣта, какъ будетъ показано ниже; тогда наведши линѣйку съ діоптрами прямо на A*a*, по томъ на B*b*, проведи въ первомъ и другомъ случаѣ линѣи; пересѣченіе сихъ линѣй *d* покажетъ на картѣ положеніе точки D въ разсужденіи предметовъ A, B, C.

А чтобъ удостовѣриться въ положеніи семъ, то наведи линѣйку съ діоптрами по направленію C*c*, и смотри, пройдетъ ли продолженная сія линѣя чрезъ точку *d*.

330. На картѣ означается всегда склоненіе магнитной стрѣлки, и при семъ рѣшеніи употребляется компасъ четвероугольной фигуры, какъ явствуетъ въ *фиг.* 172, котораго поперешникъ около трети меньше длинника; на срединѣ основанія вырѣзывается линѣя, параллельная съ продолговатымъ бокомъ ящичка; на сей линѣи утверждается спицъ и накладывается на него стрѣлка.

Для означенія на картѣ склоненія магнитной стрѣлки поступай слѣдующимъ

образомъ: приложивъ линѣйку съ діоптрами къ линѣи, означающей на планѣ разстояніе двухъ какихъ нибудь предметовъ, приведи ее въ такое положеніе, какое въ самой натурѣ находится; поставь на столикъ компасъ, и поворачивай его до тѣхъ поръ, пока стрѣлка установится на полуденной линѣи, то есть, на линѣи, назначенной по срединѣ дна ящичка; наконецъ проведи вдоль сего компаса линѣю, которая будетъ показывать склоненіе стрѣлки.

331. И обратно, когда по склоненію стрѣлки потребуется сдѣлать расположеніе плана или столика такое, какое находится между предметами, лежащими на землѣ; стоитъ только сообразить полуденную линѣю карты съ полуденною линѣею компаса.

332. Можно опредѣлить положеніе предметовъ не только посредствомъ двухъ станцій, какъ мы изъяснили въ *фигурѣ* 170, но и одною; но въ такомъ случаѣ должно уже отъ столика къ каждому предмету вымѣривать разстояніе, и класть его по маштабу на бумагѣ.

### *О Квадрантѣ.*

333. Хотя квадрантъ, о которомъ намѣрены мы говорить теперь, не имѣетъ

никакого отношенія къ Тригонометріи, и не употребляется при снятіи плановъ; однакожъ почитаемъ за приличное помѣстить описаніе его между инструментами, которые служатъ къ измѣренію угловъ.

*Квадрантомъ* въ Артиллеріи называется всякой инструментъ, посредствомъ котораго можно узнавать степень склоненія отверстій огнестрѣльныхъ орудій, хотя нѣкоторые изъ нихъ состоятъ изъ дуги не болѣе 45 градусовъ.

Употребительнѣе всѣхъ есть четверть круга ACD (*фиг.* 173), которая сверьхъ двухъ радіусовъ или линѣекъ CA, CD и ободочка AD, раздѣленнаго на 90 частей, имѣетъ еще линѣйку перпендикулярно придѣланную къ концу радіуса CA; у центра же C привѣшивается отвѣсъ на ниткѣ, котораго мы будемъ разсматривать теперь употребленіе.

334. Когда понадобится вымѣрять наклоненіе мортиры помощію квадранта, то для сего располагается онъ двоякимъ образомъ, какъ явствуетъ въ *фигурахъ* 174 и 175; въ первой (*фиг.* 174) линѣйка AB полагается на жерло мортиры, а во второй (*фиг.* 175) она кладется на дуло ея параллельно съ осью; въ томъ и другомъ случаѣ плоскость квадранта бываетъ вертикальна, ког-

да отвѣсъ CI падаетъ параллельно съ ободочкомъ.

Въ *фигурѣ* 174 склоненіе мортиры измѣряется угломъ DCI или дугою DI, заключающеюся между ниткою отвѣса и радіусомъ CD, параллельнымъ съ линѣйкою AB, потому что сіе склоненіе есть дополненіе угла, которой ось мортиры или параллельной ей радіусъ CA составляетъ съ вертикальною линѣею или CI.

Въ *фигурѣ* 175 склоненіе мортиры измѣряется угломъ ACI, которой составляется изъ отвѣса и радіуса CA, перпендикулярнаго къ линѣйкѣ AB.

335. *Фигуры* 176 и 177 представляютъ тотъ же инструментъ, только состоящій изъ дуги 45°. Въ положеніи, означенномъ *фигурою* 176, онъ можетъ измѣрять одни склоненія ниже 45°; а въ положеніи, изображенномъ *фигурою* 177, служитъ только къ измѣренію склоненій выше 45°.

Въ *фигурѣ* 176, склоненіе мортиры измѣряется угломъ ACI; а въ *фигурѣ* 177 дополненіемъ угла ACI.

336. *Фигура* 178 представляетъ инструментъ, употребляемый при измѣреніи склоненія оси въ пушкахъ.

AB есть желѣзная линѣйка, шириною около 15 линѣй, толщиною 4, а длиною отъ

3 до 4 футовъ. На концѣ ея B придѣлывается желѣзной кружокъ BE, къ которому линѣйка AB должна быть перпендикулярна; сей кружокъ бываетъ одинакой толщины съ линѣйкою, но въ діаметрѣ нѣсколько поменьше пушечнаго отверстія. По серединѣ сего круга провернута дыра, дабы въ отверстіе ея могъ проходить воздухъ, когда онъ всовывается въ пушку.

На другомъ концѣ A линѣйки AB находится мѣдной секторъ круга около 15 дюймовъ въ радіусѣ, коего ободочикъ CD раздѣляется на градусы и минуты. Раздѣленіе начинается отъ конца C радіуса AC перпендикулярнаго къ линѣйкѣ, и простирается до 45° отъ C къ D; въ противную же сторону не болѣе отъ 4 до 5 градусовъ. Изъ центра виситъ на ниткѣ или на волоскѣ гирька, сохраняемая отъ вѣтру въ футлярцѣ. Сей футлярецъ есть продолговатой и узенькой мѣдной ящичекъ, свободно обращающійся около центра A; къ низу имѣетъ онъ не большое отверстіе, въ которое вставливается увеличительное стекло, дабы сквозь оное лучше примѣтить раздѣленія на ободочкѣ, сходствующія съ отвѣсомъ. На днѣ сего футляра находится иногда сосудецъ, наполненной водою, въ которую и опускается

отвѣсъ, дабы предохранить его отъ колебанія.

Инструментъ сей не употребляется на войнѣ, но служитъ съ великою пользою въ опытахъ, требующихъ точности.

## *О Уравненіи или Нивеллированіи.*

337. Многія наблюденія доказываютъ, что земля естъ не плоская, но сферическая или почти-что сферическая; ибо при открытіи берега глазамъ мореплавателей первыми предметами представляются самые возвышеннѣйшіе. Но ежели бы поверхность земли была плоская, то въ тоже время, когда они увидѣли башню B, обняли бы взоромъ и все около ее лежащее пространство ABC (*фиг. 179*). Сего однакожъ не случается, потому что поверхность DAC земли часъ отъ часу становится ниже въ разсужденіи горизонтальной линѣи DB корабля. Совсѣмъ тѣмъ двѣ точки D и B могутъ казаться въ одномъ горизонтѣ DB, хотя онѣ и неравно отстоятъ отъ поверхности, и слѣд. отъ центра T земли. *Горизонтальною линѣею* называется такая линѣя, которая сходствуетъ съ поверхностію моря, или бываетъ параллельна къ сей поверхности, именуемой *горизонтальною плоскостію*; *вертикальная*

*же* линѣя напротивъ того есть та, которая перпендикулярно упадаетъ на горизонтальную плоскость.

*Уравнивать* ничто другое значитъ, какъ опредѣлять, чѣмъ одинъ предметъ въ разсуждении другаго отстоитъ больше или меньше отъ центра земли.

338. Когда одинъ предметъ, видимый изъ другаго, кажется съ нимъ въ одной горизонтальной линѣѣ, тогда оба они отстоятъ различно отъ центра земли. А дабы узнать сію разность, то надлежитъ примѣчать, что всякое разстояніе, на какомъ можно обозрѣвать земные предметы, или по крайней мѣрѣ то разстояніе, которое берется при уравненіи, бываетъ всегда такъ мало, что не можно разстояніе сіе DI (*фиг.* 179), вымѣренное на поверхности земной, принять за равное тангенсу DB; ибо видѣли мы (124), что тангенсъ BD есть средняя пропорціональная между всякимъ секансомъ, проведеннымъ изъ точки B, и наружною частію BI того же секанса; но какъ по причинѣ малости дуги DI, можно секансъ, проходящій чрезъ точку B и центръ T, принять за равный діаметру, то есть, двойному IT или двойному DT; почему BI будетъ служить четвертымъ членомъ въ сей пропорціи $2DT : DI = DI : BI$.

Положимъ, что DI будучи вымѣрена на поверхности земной состоитъ изъ 6000 футовъ; почему знавши, что радіусъ земли содержитъ 19605480 футовъ, найдется BI по сей посылкѣ 39210960 : 6000 = 6000 : BI; по совершеніи выкладки сыщется, что между двумя предметами, отстоящими другъ отъ друга на 6000 футовъ, и находящимися въ одной горизонтальной линѣи, разность BI разстоянія отъ центра земли будетъ состоять изъ 0ф, 91811 или 11д 0л 2с.

339. По исчисленіи разности BI, безъ всякаго труда можно сыскать разности, находящіяся на меньшемъ разстояніи, обративъ только вниманіе, что разстоянія BI, *bi* суть почти равны и параллельны DQ, D*q*, которыя (173) содержатся между собою, какъ квадраты хордъ или дугъ DI, D*i*; ибо хорды могутъ приняты быть здѣсь за одно съ дугами.

Такимъ образомъ сыщется разность *bi* разстоянія двухъ мѣстъ, между которыми находится 5000 футовъ по сей посылкѣ, $\overline{6000}^2 : \overline{5000}^2 = 0,01811 : bi$, которая по выкладкѣ будетъ равна 0ф, 63758, или 7д 7л 9с.

340. Точка B, находящаяся въ одной горизонтальной линѣѣ съ D, имѣетъ *мнимое равенство* (le niveau apparent) *или мнимой горизонтъ* съ точкою D отъ центра земли; но точка I есть *истинное равенство* (le niveau vrai) точки B съ точкою D, такъ что BI показываетъ разность между истиннымъ и мнимымъ равенствомъ.

341. Предположивъ сіи понятія, можно узнать разность равенства между двумя точками B и A (*фиг.* 180), находящимися въ различныхъ горизонтахъ, такъ: возми инструментъ, служащій къ измѣренію угловъ, и расположивъ его, какъ было предписано въ примѣрѣ для *фигуры* 146, вымѣряй уголъ BCD и разстояніе CD или CI помощію цѣпи, натягиваемой горизонтально къ поверхности земной AVB съ нѣсколькихъ пріемовъ. Тогда въ треугольникѣ CDB, принявъ его за прямоугольной въ D, сыщи BD, къ которой приложи высоту CA инструмента, и разность DI, опредѣленную по сказанному (338 и 339).

Но какъ сей способъ требуетъ великой точности при измѣреніи угла BCD и слѣд. исправнаго инструмента; то мы избѣгая сей трудности, покажемъ для достиженія той же цѣли другой способъ, которой состоитъ въ слѣдующемъ.

### *Объ Уровнѣ и его употребленіи.*

342. CABD (*Фиг.* 181) представляетъ инструментъ, употребляемый при нивеллированіи, и называется *уровенъ*.

Онъ состоитъ въ пустой трубкѣ жестяной или другаго какого нибудь металла

перегнутой въ A и B. Въ верхнія части AC, BD вставливаются двѣ стеклянныя трубки. По серединѣ AB дѣлается снизу дыра, дабы посредствомъ ея ставить инструментъ сей на подставку, и поворачивать его вовсѣ стороны. Пустота всего канала наполняется водою, пока она подымется на два или три дюйма въ высоту стеклянныхъ трубокъ. Линѣя CD, съ которою стоитъ ровно поверхность воды въ обѣихъ трубкахъ IA, KB, называется горизонтальною линѣею.

При семъ инструментѣ надлежитъ имѣть еще другое орудіе, называемое *вѣхою*. Сія вѣха будучи около 12 футовъ длиною, раздѣляется на футы, дюймы и линѣи; и дабы посредствомъ сихъ раздѣленій можно было представлять точное возвышеніе линѣи зрѣнія надъ настоящимъ горизонтомъ, то для сего употребляется четвероугольная доска или жестяной листъ (*фиг.* 182) около фута въ квадратѣ, раздѣленная на двѣ равныя части горизонтальною линѣею MN, которая называется *линѣею цѣли*; нижняя часть доски зачернена, а верхняя оставляется бѣлою. Къ сему четвероугольнику прикрѣпляется сзади задвижка перпендикулярно къ MN. Посредствомъ сей задвижки четвероугольникъ пробѣгаетъ на шпонтѣ по раздѣленіямъ вѣхи, поднимаясь или

опускаясь, какъ потребуетъ нужда для установленія линѣи цѣли.

343. И такъ чтобъ узнать разность, чѣмъ одна точка выше или ниже другой посредствомъ сего уровня, надлежитъ поставить его между тѣми двумя точками по середкѣ въ одинакомъ почти разстояніи, въ прямой или не прямой линѣѣ (мало до того нужды); ставить потомъ попеременно въ каждой точкѣ вѣху вертикально, поднимая или спуская по раздѣленіямъ ея четвероугольникъ до тѣхъ поръ, пока наблюдатель изъ станціи уровня примѣтитъ, что линѣя MN будетъ сходствовать съ продолженіемъ линѣи CD; тогда разность высоты линѣи цѣли въ каждомъ положеніи покажетъ то, чѣмъ одно мѣсто выше или ниже другаго.

Пусть будетъ, что линѣя цѣли MN при одной точкѣ поднялась на 4ф 8д, а при другой на 3ф·9д; изъ сего слѣдуетъ заключить, что первое мѣсто въ разсужденіи послѣдняго выше на 11 дюймовъ.

Такимъ же образомъ поступать должно и для всѣхъ прочихъ точекъ, находящихся почти въ одинакомъ разстояніи отъ станціи, откуда ежели можно будетъ ихъ видѣть, и когда разность ихъ горизонтовъ въ разсу-

жденіи CD не будетъ превышать вѣхъ раздѣленій вѣхи OP.

344. Но когда прочіе предметы будутъ слишкомъ удалены, или разность горизонтовъ ихъ будетъ весьма велика; въ такомъ случаѣ выбери другую станцію, и сравни изъ нее какую нибудь изъ нивеллированныхъ точекъ съ тѣми другими, поворачивая уровень въ одномъ мѣстѣ столько, сколько позволитъ разстояніе между тѣми предметами, которое должно быть одинаково, или почти одинаково.

345. Ежели же не можно брать станцій въ равномъ или почти-что равномъ разстояніи между точками, кои желаешь нивеллировать; въ такомъ случаѣ разность возвышенія двухъ какихъ нибудь точекъ не будетъ изображаться высотами линѣи цѣли при каждой точкѣ; потому что разность истиннаго горизонта отъ мнимаго показываютъ однѣ только равныя разстоянія; того ради надлежитъ изъ наблюденной высоты для каждой точки вычесть *поправку уравненія*, то есть, разность между истиннымъ и мнимымъ горизонтомъ.

На примѣръ, когда бы вѣха поставлена будучи на 1500 футовъ разстояніемъ, пока-

зала высоту линѣи цѣли 4ᵠ 8ᵈ, то вмѣсто 4ᵠ 8ᵈ, по отнятіи 8 ми линѣй поправки равенства, найденной по объявленному (338 и 339), надлежитъ щитать только 4ᵠ 7ᵈ 4ˡ.

346. Дабы изъ сказаннаго вывести примѣръ, то положимъ, что требуется *снять и начертить профиль съ крѣпости* AGHIOP (*фиг.* 183).

Представь себѣ во первыхъ, что крѣпость разсѣчена вертикально плоскостію AA′ P′P, въ которой вообрази произвольную высоту AA′ и горизонтальную линѣю A′P′.

Изъ всѣхъ угловъ A, B, C, D, E и проч. вообрази перпендикуляры AA′, BB′, CC′, DD′, EE′ и проч. и вымѣряй непосредственно горизонтальныя разстоянія между сими перпендикулярами.

Чтожъ касается до вертикальныхъ разстояній, то поставивъ уровень на поверхности BC валганка, а вѣху попеременно на каждомъ углѣ A, B, C, D, E; опредѣли высоты *Aa*, *Bb*, *Cc*, *Dd*, *Ee*; потомъ отнявъ первую изъ высоты AA′ произвольно взятой линѣи A′P′, а прочія приложивъ къ остатку *Aa*, получишь вертикальныя B′B, C′C и проч. до угла E.

По томъ поставивъ уровень на брустверѣ, а вѣху попеременно въ точкахъ E, F, G, найди разности равенства *Ee*, *Ff*, *Gg*. Вычти первую изъ EE′, а прочія приложи къ остатку, чѣмъ опредѣлишь вертикальныя линѣи FF′, GG′.

Равнымъ образомъ поступай съ частію KLMNOP, поставивъ уровень на гласисѣ.

Что принадлежитъ до части GHIK, то, какъ по причинѣ весьма низкаго положенія точекъ H и I не можно дѣйствовать вѣхою, опредѣли глубину сихъ точекъ простымъ и самымъ обыкновеннымъ способомъ, именно, опустивъ внизъ какую нибудь тяжесть на веревкѣ, привязанной къ длинной палкѣ или шесту, положенному въ G и K горизонтально,

такъ чтобъ тяжесть упала перпендикулярно къ подошвѣ H эскарпа и I контрескарпа, смѣряй длину веревки въ обоихъ случаяхъ. Первую длину веревки сложивъ съ GG′, а вторую съ KK′, получишь HH′ и II′.

По измѣреніи всѣхъ какъ горизонтальныхъ, такъ и вертикальныхъ разстояній начертится профиль такимъ образомъ: проведи на бумагѣ линѣю представляющую A′P′; положи на сей линѣѣ рядомъ числа частей масштаба, равныя числамъ найденныхъ мѣръ въ горизонтальныхъ разстояніяхъ; поставь при концѣ каждаго разстоянія перпендикуляръ, равный по масштабу сысканнымъ мѣрамъ въ сходственномъ вертикальномъ разстояніи.

Наконецъ соединивъ концы сихъ вертикальныхъ линѣй, получишь профиль требуемой крѣпости.

347. Естьли случится какая неудобность при измѣреніи горизонтальныхъ разстояній, какъ то быть можетъ на пр. во внутренномъ скатѣ AB; въ такомъ случаѣ смѣрявъ отлогость его, въ прямоугольномъ треугольникѣ AQB по извѣстнымъ AB и QB, которая опредѣлится нивеллировкою, сыщется AQ (166).

# Таблица разныхъ мѣръ, находящихся въ сей книгѣ.

## Мѣры для поверхностей.

| | Знаки. |
|---|---|
| Квадратная сажень . . . . . . . . . . . . | сс |
| Квадратной футъ . . . . . . . . . . . . | фф |
| Квадратной дюймъ . . . . . . . . . . . . | дд |
| Квадратная линѣя . . . . . . . . . . . . | лл |
| Квадратной скрупулъ или точка . . . . . | тт |

| 1 сс | 1фф | 1дд | лл |
|---|---|---|---|
| | 49 | 144 | 100 |

| | |
|---|---|
| Квадратной тоазъ . . . . . . . . . . . . | TT |
| Футъ квадратнаго тоаза или тоазъ-футъ . | Тф |
| Дюймъ ——— тоазъ дюймъ . | Тд |
| Линѣя ——— тоазъ-линѣя . | Тл |
| Скрупулъ или точка ——— тоазъ-скрупулъ | Тс |
| Первая ——— тоазъ-первая . | Т' |

| | | | | | T' |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | 1 Тс | 12 |
| | | | 1 Тл | 12 | 144 |
| | | 1 Тд | 12 | 144 | 1728 |
| | 1 Тф | 12 | 44 | 17[illegible]8 | 2[illegible]736 |
| 1 TT | [illegible] | 72 | 864 | 103[illegible]8 | 124416 |

Содержанїе квадратной сажени къ квадратному тоазу = 1225 : 1024.

## *Мѣры для толщины тѣлъ.*

| | *Знаки.* |
|---|---|
| Кубическая сажень . . . . . . . . . . . . . | ссс. |
| ———ой футъ . . . . . . . . . . . . . | ффф |
| ———ой дюймъ . . . . . . . . . . . . . | ддд |
| ———ая линѣя . . . . . . . . . . . . . | ллл |
| ———ой скрупулъ или точка . . . . . | шшш |

| | 1 ффф | 1 ддд | 1 ллл | шшш |
|---|---|---|---|---|
| 1 ссс | 343 | 1728 | 1000 | 1000. |

| | |
|---|---|
| Кубической тоазъ . . . . . . . . . . . . . | ТТТ |
| Футъ кубическаго тоаза . . . . . . . . . | ТТф |
| Дюймъ ————— . . . . . . . . . . | ТТд |
| Линѣя ————— . . . . . . . . . . . | ТТл |
| Скрупулъ или точка кубическаго тоаза . . | ТТс |
| Первая кубическаго тоаза . . . . . . . . | ТТ' |

| | | | | | ТТ' |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | 1 ТТс | 12 |
| | | | 1 ТТл | 12 | 144 |
| | | 1 ТТд | 12 | 144 | 1728 |
| | 1 ТТф | 12 | 144 | 1728 | 20736 |
| 1 ТТТ | 6 | 72 | 864 | 10368 | 124416. |

Содержанїе кубической сажени къ кубическому тоазу = 42875 : 32708.

## *Окружность круга.*

| | Знаки. |
|---|---|
| Окружность . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . | окр. |
| Градусъ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . | ° |
| Минута . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . | ′ |
| Секунда . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . | ″ |
| Терція . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . | ‴ |

| | | | | терціи |
|---|---|---|---|---|
| | | | 1 секунда | 60 |
| | | 1 минута | 60 | 3600 |
| | 1 градусъ | 60 | 3600 | 216000 |
| *окр.* | 360 | 21600 | 1296000 | 77760000 |

Содержаніе поперешника къ окружности { по Архимеду = 7 : 22
{ по Мецію = 113 : 355.

Тожъ содержаніе близу 100000000 части = 1 : 3,14159265.

Величина дуги { 1° 0,01745329 / 1′ 0,00029089 / 1″ 0,00000485 } когда радіусъ круга будетъ 1.

Логариѳмъ содержанія окружности къ поперешнику . . . . . 0,4971499.

*Конецъ второй Части.*





# ТАБЛИЦА

## *Начальныхъ Правилъ.*

---

Линѣя есть протяженїе въ одну только длину. 1.

Поверхность есть протяженїе въ длину и ширину только. *Тамъ же.*

Тѣло есть пространство въ длину, ширину и глубину или высоту. *Тамъ же.*

Точка не имѣетъ никакого пространства, и есть ничто другое, какъ конецъ или граница протяженїя. 2.

Прямая линѣя есть кратчайшїй путь отъ одной точки къ другой. *Тамъ же.*

Кривая линѣя есть слѣдъ точки, которая при каждомъ своемъ движенїи уклоняется безконечно мало въ ту или другую сторону. *Тамъ же.*

Мѣрою линѣй служитъ прямая линѣя. 4.

Плоская поверхность есть та, къ которой прямая линѣя всѣми своими частями и всячески приложена быть можетъ. 5.

Кругъ есть плоская поверхность, ограниченная кривою линѣею, называемою *окружность*, коей всѣ точки равно отстоятъ отъ точки плоскости, называемой *центръ*. 6.

Всякая часть окружности называется *дугою круга. Тамъ же.*

Полупоперешникъ или радїусъ есть разстоя-

нїе центра отъ окружности. *Тамъ же.*

Хорда есть прямая линѣя, которая проводится отъ одной точки окружности къ другой; она называется поперешникомъ или дїаметромъ, когда проходитъ черезъ центръ. *Тамъ же.*

Равныя хорды одного круга или равныхъ круговъ противополагаются равнымъ дугамъ, и обратно 7.

Уголъ есть отверстїе между двумя линѣями, соединенными въ одной точкѣ, называемой *верхъ.* 9.

Уголъ имѣетъ мѣрою дугу, которая заключается между его боками, и описывается изъ верху его, какъ изъ центра. 12.

Уголъ прямой имѣетъ мѣрою четверть окружности. 16.

Тупой уголъ есть больше прямаго угла, а острой меньше прямаго. *Тамъ же.*

Два смѣжные угла, на прямой линѣѣ лежащїе, равны вмѣстѣ двумъ прямымъ угламъ. 17.

Всѣ прямолинѣйные углы, имѣющїе верхомъ общую точку, и начерченные въ одной плоскости, равняются вмѣстѣ четыремъ прямымъ угламъ. 18.

Дополненїе угла ко 180° есть разность его съ двумя прямыми углами; а дополненїе угла къ 90° есть разность, которая находится между имъ и прямымъ угломъ. 19 и 21.

Дополненїя ко 180° или къ 90° одного угла или равныхъ угловъ, суть равны. *Тамъ же.*

Углы при верху противоположенные, равны между собою. 20.

Линѣя бываетъ перпендикулярна одна къ другой тогда, когда первая стоитъ на сей послѣдней, не наклоняясь ни на какую сторону; когда же наклоняется на какую нибудь сторону, то называется косою. 23 и 28.

Изъ одной точки, взятой на линѣѣ или внѣ линѣи, не можно провести въ одной и той же плоскости, кромѣ одного перпендикуляра къ той линѣѣ. 25 и 26.

Ежели изъ одной точки проведутся нѣсколько прямыхъ линѣй на линѣю прямуюжъ, то изъ всѣхъ короче будетъ перпендикулярная; косыя чѣмъ больше удаляются отъ перпендикуляра, тѣмъ становятся длиннѣе; косыя равно отстоящїя отъ перпендикуляра суть равны, и обратно. 27.

Каждая точка перпендикуляра, поставленнаго изъ середины прямой линѣи, равно отстоитъ отъ концовъ той линѣи; но всякая точка, находящаяся внѣ сего перпендикуляра, различное имѣетъ разстоянїе отъ тѣхъ концовъ 29 и 30.

Двѣ прямыя линѣи называются параллельными, когда онѣ вездѣ имѣютъ одинакое между собою разстоянїе. 36.

Въ двухъ параллельныхъ линѣяхъ пересѣченныхъ третьею поперечною, углы наружные съ внутренними при одной сторонѣ равны; углы внутреннїе алтернїи и наружные алтернїи равны; углы внутреннїе при одной сторонѣ, взятые вмѣстѣ, составляютъ два прямые; тоже самое дѣлаютъ и наружные при одной сторонѣ. 37 и слѣд.

Два угла, обращенные къ одной сторонѣ, и имѣющїе бока свои параллельными, равны. 43.

Прямая линѣя пересѣкаетъ окружность не болѣе, какъ въ двухъ точкахъ. 47.

Въ одномъ полкругѣ самыя большїя хорды противополагаются самымъ большимъ дугамъ, и обратно. *Тамже.*

Секансъ есть такая линѣя, которая частїю выходитъ изъ круга, и частїю находится

въ немъ. Тангенсъ есть линѣя, которая прикасается только къ окружности. *Тамъ же.*

Тангенсъ касается окружности въ одной только точкѣ 48.

Радiусъ, проведенный изъ центра къ прикосновенiю, бываетъ перпендикуляренъ къ тангенсу, и обратно. *Тамъ же.*

Точка прикосновенiя двухъ окружностей находится на прямой линѣѣ, соединяющей ихъ центры. 50.

Центръ круга, середина хорды и середина ея дуги находятся въ одной прямой линѣѣ, перпендикулярной къ той хордѣ; такъ что прямая перпендикулярная линѣя къ хордѣ, проходящая чрезъ одну какую нибудь изъ тѣхъ точку, пройдетъ также и чрезъ двѣ прочiя, и обратно. 52 и слѣд.

Двѣ параллельныя хорды заключаютъ между собою равныя дуги. 60.

Уголъ, котораго верхъ находится при окружности, а бока состоятъ изъ двухъ хордъ, или изъ тангенса и хорды, имѣетъ мѣрою половину той дуги, которая заключается между его боками. 63.

Углы при окружности, содержащiе между боками своими равныя дуги, или стоящiе на одной дугѣ, равны между собою. 64.

Уголъ при окружности бываетъ прямой, когда бока его стоятъ на концахъ поперешника. 65.

Уголъ при окружности, коего бока состоятъ изъ одной хорды и продолженiя другой, имѣетъ мѣрою половину двухъ дугъ, противоположенныхъ тѣмъ хордамъ. 69.

Уголъ, коего верхъ находится между центромъ и окружностiю, имѣетъ мѣрою половину двухъ дугъ, которыя заключаются между боками его и продолженiями ихъ. 70.

Уголъ, котораго верхъ находится внѣ круга, измѣряется половиною разности двухъ дугъ, которыя заключаются между его боками. 71.

Прямолинѣйной треугольникъ есть пространство, ограниченное тремя прямыми линѣями. 73.

Во всякомъ треугольникѣ два какїе нибудь бока, вмѣстѣ взятые, больше остальнаго третьяго. *Тамъ же.*

Треугольникъ называется равносторонной, когда всѣ бока его бываютъ равны; равнобедренной, когда два бока только равны; разносторонной, когда всѣ бока его не равны. *Тамъ же.*

Треугольникъ, у котораго одинъ уголъ прямой, называется *прямоугольной*; тотъ, у котораго одинъ уголъ тупой, *тупоугольной*; а тотъ, коего всѣ три угла острые, именуется *остроугольной*. 75.

Сумма трехъ угловъ всякаго прямолинѣйнаго треугольника, равна двумъ прямымъ угламъ. 74.

Внѣшнїй уголъ треугольника равенъ суммѣ двухъ внутреннихъ, противоположенныхъ ему. 75.

Во всякомъ треугольникѣ углы, лежащїе при равныхъ бокахъ, равны, и обратно. 77.

Въ одномъ и томъ же треугольникѣ самой большой бокъ противополагается самому большому углу, самой меньшой бокъ самому меньшому углу, и обратно. 78.

Два треугольника бываютъ совершенно равны; 1 е. когда они имѣютъ по одному равному углу, заключающемуся между двумя равными боками порознь. 80

2 е. Когда они имѣютъ по одному равному боку, лежащему при двухъ равныхъ углахъ порознь. 81.

3 е. Когда они имѣютъ по три бока равныхъ порознь. 83.

Ежели двѣ параллельныя линѣи пересѣкутся двумя параллельнымижъ; то онѣ будутъ равны межлу собою, и обратно. 82.

*Многоугольникъ* есть фигура, состоящая изъ многихъ боковъ. 84.

*Дiагональю* въ многоугольникѣ называется всякая линѣя, которая проводится отъ какого нибудь угла его къ другому. 82.

Сумма всѣхъ угловъ каждаго многоугольника равняется такому числу прямыхъ угловъ, сколько находится боковъ въ многоугольникѣ безъ двухъ; наружные же углы его равны четыремъ прямымъ. 86 и 87.

Многоугольникъ бываетъ правильной, когда всѣ бока его и углы равны. 88.

Около всякаго правильнаго многоугольника можно описать окружность круга. 89.

Бокъ правильнаго шестiугольника равенъ радiусу описаннаго около его круга. 92.

*Апотемою* правильнаго многоугольника называется перпендикуляръ, проведенный изъ центра къ какому нибудь боку его; всѣ апотемы правильнаго многоугольника равны. 91.

Во всякой Геометрической пропорцiи сумма предыдущихъ членовъ содержится къ суммѣ послѣдующихъ такъ, какъ разность предыдущихъ къ разности послѣдующихъ. 96.

Сумма двухъ первыхъ членовъ Геометрической пропорцiи содержится къ суммѣ двухъ послѣднихъ такъ, какъ разность двухъ первыхъ къ разности двухъ послѣднихъ. 98.

Прямая линѣя, проведенная въ треугольникѣ параллельно съ какимъ нибудь бокомъ его, пересѣкаетъ остальные два бока на части пропорцiональныя, и обратно. 102.

Естьли проведется нѣсколько прямыхъ линѣй изъ одной точки, и когда прямыя

пересѣкутся двумя параллельными линѣями, то тѣ прямыя пересѣкутся параллельными пропорцїонально. 103

Прямая линѣя, раздѣляющая въ треугольникѣ уголъ пополамъ, дѣлитъ противоположенной бокъ тому углу на двѣ части пропорцїонально прочимъ двумъ бокамъ. 104.

Два треугольника бываютъ подобны: 1 е. когда у нихъ всѣ углы будутъ порознь равны между собою. 109.

И слѣдовательно когда два угла одного будутъ равны порознь двумъ угламъ другаго. 110.

Когда бока одного параллельны или перпендикулярны бокамъ другаго. 111.

2 е. Когда они имѣютъ по углу равному, заключающемуся между двумя пропорцїональными боками. 113.

3 е. Когда три бока одного пропорцїональны тремъ бокамъ другаго 114.

Перпендикуляръ, опущенный въ прямоугольномъ треугольникѣ изъ прямаго угла на гипотенузу, раздѣляетъ тотъ треугольникъ на два другїе ему подобные, и слѣдовательно подобные между собою. 112.

Перпендикуляръ, проведенный изъ прямаго угла на гипотенузу, есть средняя пропорцїональная линѣя между двумя отрѣзками гипотенузы. *Тамъ же.*

Каждой бокъ прямаго угла есть средняя пропорцїональная линѣя между гипотенузою и сходственнымъ отрѣзкомъ. *Тамъ же.*

Когда чрезъ одну точку проведется нѣсколько прямыхъ линѣй, пересѣкающихъ двѣ параллельныя линѣи, то части одной изъ тѣхъ параллельныхъ будутъ пропорцїональны сходственнымъ частямъ другой. 115.

Двѣ хорды, пересѣкающіяся въ кругѣ, имѣютъ части свои взаимно или обратно пропорціональныя. 120.

Перпендикуляръ, проведенный изъ какой нибудь точки окружности на поперешникъ, бываетъ всегда среднею пропорціональною линѣею между отрѣзками поперешника. 121.

Два секанса, проведенные изъ одной точки, взятой внѣ круга, бываютъ взаимно пропорціональны къ наружнымъ частямъ своимъ. 123.

Естьли изъ одной точки, взятой внѣ круга, проведутся тангенсъ и секансъ, то тангенсъ будетъ средняя пропорціональная линѣя между цѣлымъ секансомъ и наружною частію его. 124.

Прямая линѣя раздѣляется по наружной посредственной пропорціи, когда пересѣкается на двѣ такія части, изъ которыхъ одна бываетъ среднею пропорціональною между всею линѣею и другою частію. 125.

Естьли въ двухъ подобныхъ многоугольникахъ изъ двухъ сходственныхъ угловъ проведутся діагонали къ прочимъ угламъ, то оба тѣ многоугольники раздѣлятся на одно число подобныхъ треугольниковъ, и обратно. 127 и 128.

Окруженія подобныхъ фигуръ содержатся между собою, какъ сходственные ихъ бока. 129.

Какъ круги суть фигуры подобныя, то окружности ихъ содержатся между собою, какъ полупоперешники или поперешники ихъ. 131.

Параллелограммъ есть четвероугольникъ, котораго противоположенные бока параллельны. 133.

Онъ называется *ромбоидомъ*, когда смѣжные углы его не бываютъ равны, и когда ни одного угла не имѣетъ прямаго. *Тамъ же*.

*Ромбомъ*, когда онъ имѣетъ всѣ четыре бока равные, но ни одного прямаго угла. *Тамъ же.*

*Прямоугольникомъ*, когда у него всѣ углы бываютъ прямые, но смѣжные бока не равны. *Тамъ же.*

*Квадратомъ*, когда всѣ бока его равны и углы прямые. *Тамъ же.*

*Трапеція* есть четвероугольникъ, котораго двѣ какія нибудь противоположенныя стороны параллельны. *Тамъ же.*

Прямолинѣйной треугольникъ равенъ половинѣ параллелограмма, имѣющаго съ нимъ одно основаніе и одну высоту. 134.

Параллелограммы одного основанія и одной высоты равны въ площадяхъ. 135.

Тоже и треугольники. 136.

Площадь параллелограмма состоитъ изъ произведенія основанія его на высоту. 139.

Площадь треугольника равна половинѣ произведенія основанія его на высоту. 141.

Площадь трапеціи равна произведенію высоты ея на линѣю, проведенную параллельно къ двумъ основаніямъ ея, и въ равномъ отъ нихъ разстояніи. 142

Площадь правильнаго многоугольника равна половинному произведенію окруженія его на апотему. 144.

Площадь круга равна произведенію окружности его на половину радіуса. 145

Круговой секторъ или вырѣзокъ есть часть круга, заключающаяся между дугою и двумя радіусами; сегментъ или отрѣзокъ круга есть площадь, содержащаяся между дугою и хордою ея. 147.

Измѣреніе поверхностей саженями есть способъ находить величину площади, коей протяженія опредѣлены саженями и частями сажени. 151.

Площади параллелограммовъ и треугольни-

ковъ содержатся между собою, какъ произведенія основаній ихъ на высоты. 156 и 158.

Параллелограммы одного основанія содержатся между собою, какъ ихъ высоты; а тѣ, у которыхъ будетъ одинакая высота, содержатся какъ ихъ основанія. *Тамъ же.*

Тоже и треугольники *Тамъ же.*

Квадратъ радіуса къ площади круга содержится, какъ діаметръ къ окружности. 157.

Площади подобныхъ параллелограммовъ и треугольниковъ содержатся между собою, какъ квадраты сходственныхъ боковъ ихъ. 159 и 160.

Свойство сїе относится до всѣхъ подобныхъ фигуръ. 161.

Какъ круги суть фигуры подобныя, то площади ихъ содержатся между собою, какъ квадраты полупоперешниковъ ихъ или цѣлыхъ поперешниковъ. 162.

Во всякомъ прямоугольномъ треугольникѣ квадратъ гипотенузы равенъ суммѣ квадратовъ, сдѣланныхъ на катетахъ его. 164.

Квадратъ гипотенузы содержится къ каждому квадрату катетовъ, какъ гипотенуза къ сходственному отрѣзку. 171.

Естьли изъ разныхъ точекъ окружности круга проведутся хорды къ концу поперешника, а перпендикуляры къ самому поперешнику; то квадраты хордъ будутъ пропорціональны частямъ поперешника, заключеннымъ между перпендикулярами и концомъ діаметра, гдѣ хорды сходятся. 173.

Прямая линѣя не можетъ быть частїю въ плоскости, а частїю выше или ниже ея. 175.

Двѣ прямыя пересѣкающїяся линѣи находятся въ одной плоскости. 177.

Сѣченїе двухъ плоскостей есть прямая линѣя. 178.

Чрезъ одну и туже прямую линѣю могутъ пройти безчисленное множество разныхъ плоскостей. *Тамъ же*.

Линѣя бываетъ къ плоскости перпендикулярна, когда она стоитъ на той плоскости не наклоняясь ни на какую ея сторону. 179.

Линѣя бываетъ также перпендикулярна къ плоскости, когда стоитъ въ точкѣ перпендикулярно къ двумъ какимъ нибудь линѣямъ, проведенымъ отъ той точки на плоскости. 180.

Естьли изъ одной точки, взятой внѣ плоскости, проведутся перпендикуляръ и косая линѣя къ той плоскости, и когда по соединенїи концовъ ихъ прямою линѣею поставится въ плоскости у конца косой перпендикуляръ къ соединяющей линѣи, то сей перпендикуляръ будетъ также перпендикуляромъ къ косой линѣи. 183.

Одна плоскость бываетъ перпендикулярна къ другой, когда первая проходитъ по прямой линѣѣ, перпендикулярной къ той другой. 186.

Естьли въ двухъ плоскостяхъ, перпендикулярныхъ между собою, проведется изъ какой нибудь точки одной плоскости перпендикулярная линѣя къ общему ихъ сѣченїю, то сїя линѣя будетъ также перпендикулярна и къ другой плоскости, и обратно. 187 и 188.

Двѣ перпендикулярныя линѣи къ одной плоскости, параллельны между собою. 188.

Двѣ прямыя параллельныя къ третїей, параллельны между собою. 189.

Общее сѣченїе двухъ плоскостей, перпендикулярныхъ къ третїей, есть перпендикулярно также и къ той третїей плоскости. 190.

Плоской уголъ есть отверстїе двухъ взаимно

пересѣкающихся плоскостей. 191.

Мѣра плоскаго угла есть одинакова съ тою, какая служитъ для прямолинѣйнаго угла, состоящаго изъ двухъ прямыхъ линѣй, проведенныхъ въ тѣхъ плоскостяхъ перпендикулярно къ общему ихъ сѣченію. 192.

Двѣ плоскости параллельны между собою, когда онѣ вездѣ равно отстоятъ одна отъ другой. 196.

Ежели двѣ параллельныя плоскости пересѣкутся третіею, то ихъ сѣченія будутъ параллельны. 197.

Плоскіе углы, происходящіе отъ плоскостей взаимно пересѣкающихся или сходящихся, имѣютъ тѣ же свойства, какъ прямолинѣйные. 193. и 198.

Естьли изъ точки, взятой внѣ плоскости, проведется нѣсколько линѣй къ той плоскости, то линѣи сіи пересѣкутся пропорціонально другою плоскостію, параллельною къ первой, и по соединеніи точекъ сѣченія въ каждой плоскости составятъ подобныя фигуры 199.

Сіи подобныя фигуры содержатся между собою, какъ квадраты сходственныхъ растояній между точкою и плоскостями 202.

Призма есть тѣло, которое происходитъ изъ того, когда плоскость двинется параллельно сама къ себѣ вдоль по прямой линѣѣ 204.

Призма бываетъ прямая или косая судя по тому, какъ бока ея будутъ къ произведшей ея плоскости, перпендикулярны или наклонены. 204.

Параллелипипедъ есть призма, которой основаніемъ служитъ параллелограммъ; онъ называется *прямоугольнымъ*, когда стоитъ перпендикулярно на основаніи прямоугольника. *Тамъ же*.

Кубъ есть параллелипипедъ, имѣющій осно-

ванїемЪ квадратЪ, а высотою бокЪ равный тому квадрату. *Тамъ же.*

Цилиндрь есть призма, имѣющая вЪ основанїи кругЪ; *осью* цилиндра называется прямая линѣя, которая соединяетЪ центры двухЪ противоположенныхЪ основанїй или круговЪ. 205.

Пирамида есть тѣло, ограниченное многоугольникомЪ, которой служитЪ ей основанїемЪ, и столькими треугольными поверхностями, сколько находится боковЪ вЪ основанїи; всѣ треугольники соединяются вЪ одной точкѣ, которая называется *верхомъ* пирамиды. 206.

Пирамида бываетЪ правильная, когда имѣетЪ основанїемЪ правильной многоугольникЪ, а высотою перпендикулярЪ, упадающїй изЪ верху пирамиды вЪ центрЪ многоугольника. *Тамъ же.*

КонусЪ есть пирамида, имѣющая вЪ основанїи кругЪ; онЪ бываетЪ прямой или косой глядя потому, какЪ прямая линѣя, проведенная изЪ верху кЪ центру основанїя, бываетЪ перпендикулярна или наклонена. 207.

ШарЪ есть тѣло, раждающееся отЪ обращенїя полкруга около своего поперешника. 208.

*Большимъ кругомъ шара* называется тотЪ, которой имѣетЪ одинакой поперешникЪ сЪ шаромЪ. *Тамъ же.*

СекторЪ или вырѣзокЪ шара есть тѣло, которое происходитЪ отЪ обращенїя половины круговаго вырѣзка около радїуса; а выпуклистой кругЪ есть та поверхность, которую производитЪ обращенїемЪ дуга круговаго сектора. *Тамъ же.*

СегментЪ или отрѣзокЪ шара есть тѣло, происходящее отЪ обращенїя половины кругова-

го сегмента около своей стрѣлки. *Тамъ же.*

*Подобными тѣлами* называются тѣ, которыя ограничиваются одинакимъ числомъ подобныхъ сторонъ и одинаково расположенныхъ. 209.

Бока и верхи сходственныхъ толстыхъ угловъ суть линѣи и точки одинаково расположенныя въ двухъ подобныхъ тѣлахъ. 210.

Треугольники, которыхъ боками соединяются въ двухъ подобныхъ тѣлахъ верхи толстыхъ сходственныхъ угловъ, суть подобны и одинаково расположены. 211.

Дїагонали, которыя соединяютъ сходственные толстые углы въ двухъ подобныхъ тѣлахъ, содержатся между собою, какъ сходственные бока тѣхъ тѣлъ. 212.

Перпендикуляры, опущенные изъ верховъ толстыхъ сходственныхъ угловъ въ двухъ подобныхъ тѣлахъ, пропорцїональны прочимъ сходственнымъ бокамъ. 214.

Наружная поверхность призмы равна произведенїю бока ея на окруженїе сѣченїя, перпендикулярнаго къ тому боку. 216.

Когда призма будетъ прямая, то наружная поверхность ея равна произведенїю окруженїя основанїя ея на высоту. 217.

Наружная поверхность прямаго цилиндра равна произведенїю окружности основанїя его на высоту. 218.

Наружная поверхность правильной пирамиды равна окруженїю основанїя ея, помноженному на половину апотемы той пирамиды. 219.

Наружная поверхность прямаго конуса равна произведенїю окружности основанїя его на половину наклоненнаго бока. 220.

Поверхность усѣченнаго прямаго конуса равна произведенїю наклоненнаго бока на окружность сѣченїя, зделаннаго въ равномъ раз-

стоянiи отъ противо-положенныхъ и паралельныхъ его основанiй 222.

Поверхность шара равна окружности самаго большаго круга, помноженной на дiаметръ. 223.

Она равняется наружной поверхности цилиндра, около его описаннаго. 224.

Она также равняетеся учетверенной площади самаго большаго круга. 225.

Поверхность выпуклистаго круга въ шарѣ равна произведенiю стрѣлки его на окружность самаго большаго круга шара. 226.

Наружныя поверхности прямыхъ призмъ содержатся между собою, какъ произведенiя высотъ ихъ на окруженiя основанiй. 228.

Поверхности прямыхъ призмъ одинакой высоты содержатся между собою, какъ окруженiя основанiй ихъ; онѣ содержатся также какъ высоты, естьли окруженiя будутъ равны. 229.

Поверхности прямыхъ конусовъ содержатся между собою, какъ произведенiя боковъ ихъ на окружности основанiй, или на радiусы или на дiаметры тѣхъ основанiй. 230.

Поверхности подобныхъ тѣлъ содержатся между собою, какъ квадраты сходственныхъ боковъ ихъ. 231.

Поверхности двухъ шаровъ содержатся между собою, какъ квадраты полупоперешниковъ или цѣлыхъ поперешниковъ ихъ. 232.

Двѣ призмы одного основанiя и одной высоты равны въ толщинѣ. 234.

Толщина всякой призмы равна произведенiю основанiя ея на высоту. 236.

Толщина пирамиды или конуса равна трети произведенiя основанiя ея на высоту. 242.

Толщина шара равняется двумъ третямъ тол-

щины цилиндра, около его описаннаго. 245.

Толщина сектора шара равна произведенію площади выпуклистаго круга на треть радіуса. 247.

Толщина сферическаго сегмента равна толщинѣ такого цилиндра, которой имѣетъ радіусомъ стрѣлку, а высотою полупоперешникъ шара безъ трети стрѣлки. 248.

*Усѣченною призмою* называется такое тѣло, которое остается по отсѣченіи части въ призмѣ наклоненною къ основанію ея плоскостью. 250.

Когда изъ трехъ угловъ какого нибудь основанія усѣченной треугольной призмы опустятся перпендикуляры на другое основаніе, то толщина ея будетъ равна произведенію послѣдняго сего основанія на треть суммы трехъ перпендикуляровъ. 252.

*Измѣреніе тѣлъ саженями* есть способъ находить толщину тѣла, коего протяженія вымѣрены саженями и частями сажени. 259.

Призмы содержатся между собою, какъ произведенія основаній ихъ на высоты. 268.

Призмы одинакой или равной высоты содержатся между собою, какъ ихъ основанія; тѣже, которыя имѣютъ одинакое основаніе, содержатся, какъ ихъ высоты. *Тамъ же.*

Толщины двухъ подобныхъ тѣлъ содержатся между собою, какъ кубы сходственныхъ боковъ ихъ 270.

Толщины двухъ шаровъ содержатся между собою, какъ кубы полупоперешниковъ ихъ или цѣлыхъ поперешниковъ. *Тамъ же.*

## *Изъ Тригонометріи.*

---

Плоская Тригонометрія учитъ по даннымъ тремъ частямъ прямолинѣйнаго треугольника, между которыми должно быть по

*КонецЪ Таблицы ПравилЪ.*

